INDICE

1. L'INSIEME DEI NUMERI REALI

1.1 I principali insiemi di numeri

Riprendiamo i principali insiemi numerici:

- **N**, l'insieme dei numeri naturali 0; 1; 2; 3; 4; ....

  L'idea intuitiva di numero naturale è associata al problema di contare e ordinare gli elementi di un insieme. Questi due problemi sono strettamente legati fra loro: infatti, contando gli oggetti di un insieme, automaticamente li ordiniamo.

- **Z** , l'insieme dei numeri interi ...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...

  L'introduzione dei numeri negativi, risalente agli indiani (ca. VII secolo d.C.), che li usavano per rappresentare i debiti, pose grossi problemi ai matematici europei dal '500 fino al '700.
  E' solo da circa un secolo e mezzo che i numeri negativi sono considerati numeri a pieno diritto. Il loro impiego arricchisce la struttura algebrica molto povera di N.

- **Q** , l'insieme dei numeri razionali.

  Problemi pratici, quali ad esempio la misurazione di una grandezza, portarono all'introduzione delle frazioni.
  Il termine frazione significa rapporto e i numeri razionali vengono detti così proprio perché sono esprimibili come rapporto di due numeri interi.

I numeri razionali possono essere scritti in diversi modi:

- come **frazione**: ....
- in **forma mista**: ....
- in **forma decimale**: ....

Le frazioni si possono scrivere in forma decimale semplicemente eseguendo la divisione tra il numeratore e il denominatore. Si ottengono due tipi di numeri decimali:

- i numeri decimali finiti (ad es. $\frac{8}{5}$ $=$......................);
- i numeri decimali periodici (ad es. $\frac{7}{3}$ $=$...).

Domanda: Ci sono dei numeri decimali **non finiti** e **non periodici**?
Per rispondere a questa domanda dobbiamo provare a cercare degli esempi

Esempi:
....

....

....

....

....

Questi numeri non sono elementi di Q.

I numeri decimali *non finiti e non periodici* si chiamano **numeri ....**.
Il loro insieme viene indicato con **I**.

L'insieme dei numeri reali **R** è formato da numeri razionali e da numeri irrazionali; in simboli $R = Q \cup I$.

Tra i numeri irrazionali ce ne sono alcuni famosi che già conosci, come ad esempio **π.**

π = 3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 ...

Altri esempi: $\sqrt{2}$ = 1,414213... $\sqrt{5}$ = 2,236067....

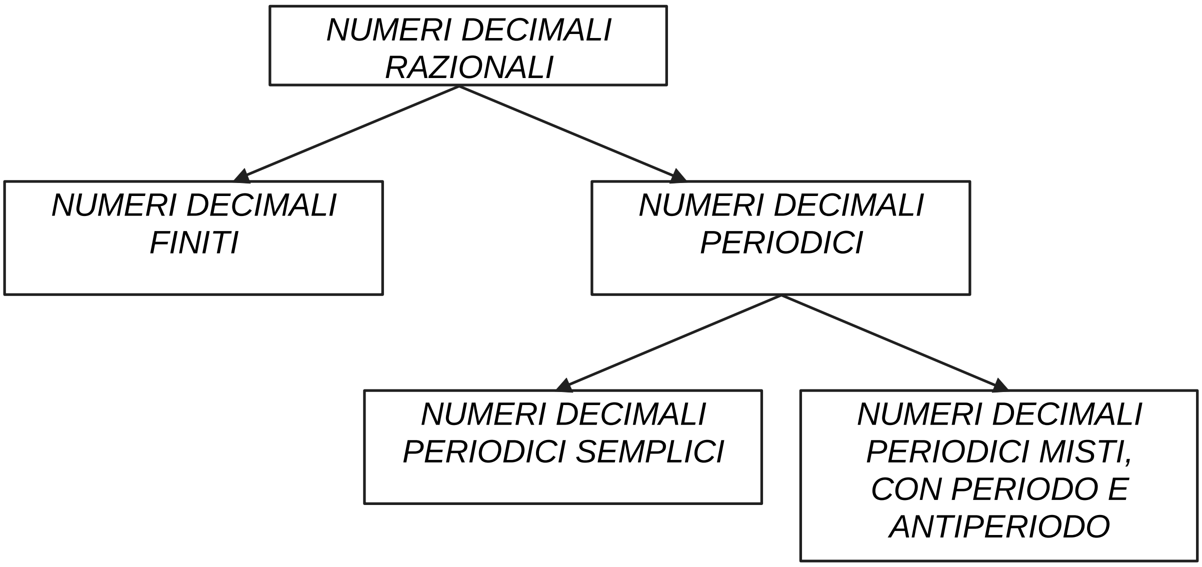
ESERCIZI

1. Costruisci con riga e compasso un segmento di lunghezza $\sqrt{2}$, poi uno lungo $\sqrt{3}$, ...

2. Scrivi in forma di frazione:
$2\,\frac{3}{4}$; $1\,\frac{1}{4}$; $4\,\frac{1}{4}$; $5\,\frac{3}{8}$; $3\,\frac{3}{5}$;

3. Scrivi , se puoi, come numero misto:
$\frac{3}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{25}{8}$; $\frac{54}{10}$; $\frac{8}{25}$

4. Tra i numeri decimali razionali, possiamo distinguere:



a) trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali: $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{33}$; $\frac{59}{111}$; $\frac{41}{495}$; $\frac{7}{900}$;
b) trasforma i seguenti numeri decimali finiti in frazioni ridotte ai minimi termini:
0,45; 0,32; 0,25; 0,75; 0,125; 2,5; 5,25;
c) trasforma i seguenti numeri decimali periodici semplici in frazioni:
$0,\overline{3}$; $0,\overline{34}$; $0,\overline{5}$; $0,\overline{102}$; $0,\overline{45}$; $0,\overline{9}$; $1,\overline{7}$; $3,\overline{58}$; $6,\overline{25}$

1.2 Proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri reali

Siano a, b, c elementi di R.
Le seguenti proprietà valgono per tutti gli a, b, c appartenenti ad R.

Proprietà dell'addizione.

Interna e ovunque definita	La somma di due elementi di R é ancora un elemento di R.
Associativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$
Commutativa	$a+b=b+a$
Esiste l'elemento neutro	é lo 0, tale che $a+0=0+a=a$
Esiste l'inverso di ogni numero (opposto)	l'inverso di a rispetto all'addizione é -a, tale che $a+(-a)=(-a)+a=0$

(R; +) avendo queste caratteristiche ha la struttura di gruppo commutativo.

Esercizio: le proprietà che valgono per l'addizione di numeri reali, valgono anche per la sottrazione

Proprietà della moltiplicazione.

Interna e ovunque definita	Il prodotto di due elementi di R é ancora un elemento di R.
Associativa	$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
Commutativa	$a \bullet b = b \bullet a$
Esiste l'elemento neutro	é il numero 1, tale che $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$
Esiste l'inverso di ogni numero (simmetrico)	l'inverso di a rispetto alla moltiplicazione é $\frac{1}{a}$, tale che $a \bullet \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \bullet a = 1$ (l'inverso esiste solo se $a \neq 0$)

(R; •) avendo queste caratteristiche ha la struttura di gruppo commutativo.

Esercizio: queste proprietà valgono anche per la divisione?

Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

Distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

Essendo (R; +) e (R; •) dei gruppi commutativi e valendo anche quest'ultima importante proprietà, (R; +; •) ha la struttura di corpo commutativo.

Osservazioni:

i) Ogni sottrazione può essere scritta come addizione dell'opposto:

$$a - b = a + (-b) \qquad \text{esempio: } 3 - 5 = 3 + (-5)$$

ii) Ogni divisione può essere scritta come moltiplicazione del simmetrico:

$$a \div b = a \bullet \frac{1}{b} \ (\text{con } b \neq 0) \text{esempio: } \ 5 \div 8 = 5 \bullet \frac{1}{8}$$

Esercizio: Completa la seguente tabella.

	inverso rispetto al +	inverso rispetto al •
5		
–4		
$\frac{3}{4}$		
$-\frac{3}{8}$		
$\frac{-5}{4}$		
$\frac{4}{-9}$		

Alcune precisazioni sul calcolo con le frazioni:

a) attenzione alle scritture ambigue, indicare sempre la linea di frazione principale

$$\frac{a}{\frac{b}{c}}$$

b) $\frac{a}{0}$ non ha significato per ogni $a \neq 0$.

c) $\frac{0}{a} = 0$ per ogni $a \neq 0$.

d) $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata.

e) con $\frac{a}{b}$, dove a, b sono numeri interi e $b \neq 0$, si indicano le frazioni, le cui principali regole di calcolo sono:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} =$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$

Nella pratica, prima di sommare o sottrarre è utile ricordarsi di ridurre le frazioni ai minimi termini e di scegliere tra i denominatori comuni, quello pi˘ piccolo (che è il m.c.m. tra i denominatori). Ecco alcuni esempi di addizioni/sottrazioni con le frazioni.

$$\frac{7}{28} + \frac{6}{15} - \frac{24}{16} + 2 =$$

$$\frac{15}{20} + \frac{70}{80} + \frac{30}{72} - \frac{45}{18} =$$

Prima di moltiplicare è invece utile ricordarsi di semplificare; vediamo anche qui alcuni esempi.

$$\frac{40}{30} \bullet \frac{25}{80} \bullet \frac{14}{8} =$$

$$\frac{12}{24} \bullet \frac{12}{32} \bullet \frac{40}{80} \bullet \frac{112}{80} =$$

1.3 Le potenze con esponente naturale

Definizione

Sia a un numero reale e n un numero naturale.

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{n volte}}$$

Proprietà del calcolo con le potenze

Siano a e b numeri reali e m, n numeri naturali. (Si esclude la divisione per 0.)

(P1) $a^m \bullet a^n =$ .... $3^5 \bullet 3^7 =$ ....

(P2) $\left(a^m\right)^n =$ .... $\left(3^2\right)^5 =$ ....

(P3) $\left(a \bullet b\right)^m =$ .... $\left(3 \bullet 4\right)^2 =$ ....

(P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m =$ .... $\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ ....

(P5) $\frac{a^m}{a^n} =$ .... $\frac{3^7}{3^4} =$ ....

(P6) $\left(-a\right)^n =$ .... $\left(-3\right)^2 =$ .... $\left(-3\right)^3 =$ ....

Osservazioni:

i) 0^0 non é definito.

ii) $0^n = 0$ per ogni n > 0.

iii) $1^n = 1$

iv) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Esercizi:

1. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $(-3)^0 =$ b) $(-3)^1 =$ c) $(-3)^4 =$ d) $(-3)^5 =$

e) $(-3)^{-2} =$ f) $(-3)^{-3} =$ h) $(-3)^{-1} =$

2. Risolvi le seguenti espressioni:

a) $\left[\left(2^8 : 2^5\right)^2 : 2^4\right]^3 : 2 + 2^3 =$ $[40]$

b) $\left\{\left(8^7 \cdot 8^0 \cdot 8^4 \cdot 8^3\right) : \left(8^4\right)^3 - \left[\left(5^4\right)^3 \cdot 5^6\right] : 5^{18} + 3^{10} : 3^9\right\} : 11 =$ $[6]$

c) $\left\{5 \cdot \left[\left(2 + 3 \cdot 5^2\right) : 7 - 10\right]^5 + \left(7 \cdot 2^3 - 2^5\right) : 3 - 3^5 : 9^2\right\}^3 : 10^2 - 3^7 : 3^5 =$ $[1]$

d) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^7 : \left(\frac{1}{25}\right)^7\right] \cdot \left(\frac{2}{125}\right)^7 =$ $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^7\right]$

e) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^4 : \left(\frac{7}{3}\right)^4\right]^4 : \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^4 =$ $[1]$

f) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2} + 2\right) : 4 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} : \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 3 - 0{,}25\right)^3 =$ $[1]$

1.4 La notazione scientifica

Per rappresentare dei numeri molto grandi o molto piccoli in matematica si usano le potenze di dieci. Vediamo alcuni esempi.

12'345'000'000 = 12'345 • 10^6
= 12,345 • 10^9
= 1,2345 • 10^{10}

Tra i diversi modi di scrivere il numero 12'345'000'000 utilizzando le potenze di dieci, l'ultimo è quello che viene chiamato "**notazione scientifica**": *si distingue dai precedenti perché ha una sola cifra diversa da zero davanti alla virgola.*
Prova a scrivere i seguenti numeri in notazione scientifica:

12'345'000'000'000 =

123'450'000 =

1'234'500 =

245'000'000'000'000'000'000 =

245 =

Quando esegui dei calcoli con numeri grandi sulla calcolatrice, sul visore appaiono i risultati nella forma scritta sotto. Scrivi accanto il significato esatto di quanto appare sul visore.

" 4,56 ^{12} " =

" 1,228765 ^{25} " =

" 6,44831 ^{18} "=

" 2,31 $^{-12}$ " =

" 4,2 $^{-25}$ " =

Negli ultimi due casi i numeri rappresentati sono dei numeri molto piccoli e sono state utilizzate le potenze di dieci con esponente negativo. Vediamo più da vicino il loro significato:

10^{-1} =

10^{-2} =

10^{-3} =

10^{-5} =

Scrivi i seguenti numeri in notazione scientifica:

0,0034 =

0,00567 =

0,000'001'2 =

0,000'000'000'000'000'000'001'2 =

1.5 APPROFONDIMENTO

$\sqrt{2}$ potrebbe essere un numero razionale?

In tal caso ci sarebbero due numeri $p \in Z$ e $q \in Z^*$, e potremmo scrivere $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

dove la frazione $\frac{p}{q}$ é ridotta ai minimi termini.

Questo vuole anche dire che p e q non hanno dei divisori in comune.

L'uguaglianza rimane vera se mettiamo al quadrato sia il termine di sinistra che il termine di destra, cioè

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ cioè } \quad 2 = \frac{p \bullet p}{q \bullet q}.$$

Interpretiamo ora questo risultato: ci sono due numeri interi p e q che soddisfano l'ultima uguaglianza? Visto che p e q non hanno dei divisori in comune, il resto della divisione euclidea non potrà mai essere nullo e quindi l'ultima uguaglianza non é verificata da nessun p e nessun q presi tra i numeri interi.

Di conseguenza, non essendoci questi p e q non é possibile scrivere $\sqrt{2}$ come frazione.

2. MONOMI

Un **monomio** è un'espressione del tipo n•A, dove

n è un numero e

A è un prodotto di lettere con esponenti naturali.

ESEMPI.

Sono dei monomi: ....

Non sono dei monomi: ....

Osservazione: in un monomio si distinguono due parti, una parte numerica e una parte letterale.

Due **monomi** si dicono **simili** quando hanno la parte letterale uguale, cioè formata dalle stesse lettere, con gli stessi esponenti.

ESERCIZIO: per ognuno dei seguenti monomi, indica almeno tre monomi simili.

$3abc$: ....

$7x^2yz$: ....

$-\frac{5}{3}gj^7p^2$: ....

Osservazione: è utile scrivere la parte letterale in ordine alfabetico, per meglio riconoscere i monomi simili.

Si chiama **grado di un monomio** la somma degli esponenti delle lettere che lo compongono.

ESEMPI: $23a^4c^5$ ha grado ....

$-2p^2qr$ ha grado ....

Somma e sottrazione di monomi.

ESEMPI:
$3x + 5x - 2x = ...$
$3a - 2b + a - 4b = ...$
$m^4 + m^3 - m^2 + m = ...$

REGOLA: si possono sommare o sottrarre solo monomi che sono tra loro simili.

Prodotto di monomi.

ESEMPI:
$2a^2 \bullet 3ab \bullet 5ab^5 = ...$
$4x^3 \bullet \frac{2}{3} xy^2 \bullet xt = ...$

REGOLA: per moltiplicare due o più monomi si moltiplicano tra loro i numeri e tra loro le lettere uguali, applicando le regole del calcolo con le potenze.

Divisione di monomi.

ESEMPI:
$(8x^6y^2) : (4x^2y) = \frac{8x^6y^2}{4x^2y} = ...$
$(6m^5y) : (2m^2y^3) = \frac{6m^5y}{2m^2y^3} = ...$
$(7a^3b^2) : (2ab^2c^3) = \frac{7a^3b^2}{2ab^2c^3} = ...$

REGOLA: per dividere due monomi, si dividono tra loro i numeri e tra loro le lettere uguali, applicando le regole del calcolo con le potenze.

<u>Osservazione</u>: negli ultimi due esempi, il risultato della divisione non è più un monomio.

Potenza di un monomio.

ESEMPI:
$(5cd^3)^2 = ...$
$(-\frac{3}{4} mn^4)^3 = ...$

REGOLA: per elevare un monomio alla potenza n, si elevano tutti i suoi fattori alla potenza n.

ESERCIZI.

1. Indica la parte numerica, la parte letterale e il grado dei seguenti monomi.

   a) $5x^3$; b) $\frac{5}{7}a^3bc^2$; c) $3xy$; d) $2xyz^4$;

Esegui le seguenti operazioni tra monomi.

2. a) $4y^5m+3y^5m$; b) $3x^3y-x^3y$; c) $7m^3z^2-6m^3z^2$

3. a) $5m^2tz^3+2m^2tz^3-m^2tz^3 =$
   b) $4x^5y^2-2x^5y^2+\frac{1}{2}x^5y^2+\frac{2}{5}x^5y^2 =$

4. a) $3x^3c^2t+2x^2c^3t-2x^3c^2t+x^2c^3t=$
   b) $5ym^3-\frac{1}{3}am^3+\frac{3}{7}am^3+ym^3 =$

5. a) $(2b^5t^3x)\bullet(7b^3t^2)=$
   b) $(x^2z)\bullet(3xt^5)\bullet(\frac{2}{3}x^3t^2)=$

6. a) $(10x^7y^5):(7b^3t^2)=$
   b) $(18m^7a^2):(3m^6a^5z^2)=$
   c) $(9x^3t):(5x^4t)=$

7. a) $(2x^5y^2z)^5 =$
   b) $(\frac{3}{5}ab^3c^7)^3 =$

8. a) $\dfrac{6a^3b^5c-3a^3b^5c+2a^3b^5c}{(5a^2b)\bullet(2ab^7)} =$
   b) $\dfrac{4x^2y^7-3x^2y^7}{(3xyc)^2} =$

9. Nella mia famiglia lavorano fuori casa 3 persone:
   io ho un certo reddito (indicalo con la x); mio fratello guadagna la metà di quello che guadagno io; mia madre, infine, guadagna il doppio di quello che guadagna mio fratello. Qual è il reddito complessivo della nostra famiglia?

10. E' dato un cubo di lato a; il suo volume V e la sua superficie totale S sono dati da:
    $V = a^3$ $\qquad\qquad$ $S = 6a^2$
    a) Calcola il volume V' e la superficie totale S' del cubo di lato doppio;
    b) calcola il volume V'' e la superficie totale S'' del cubo di lato triplo.

11. E' dato un parallelepipedo che ha gli spigoli lunghi a, b, c ed il volume $V = abc$.
    a) Calcolare il volume del parallelepipedo che si ottiene raddoppiando uno spigolo.
    b) Calcolare il volume del parallelepipedo che si ottiene raddoppiando due spigoli.
    c) Calcolare il volume del parallelepipedo che si ottiene raddoppiando i tre spigoli.

Soluzioni:

2. a) $7y^5m$ b) $2x^3y$ c) $1m^3z^2$
3. a) $6m^2tz^3$ b) $\frac{29}{10}x^5y^2$
4. a) $x^3c^2t + 3x^2c^3t$ b) $6ym^3 + \frac{2}{21}am^3$
5. a) $14b^8t^5x$ b) $2x^6t^7z$
6. a) $\frac{10x^7y^5}{7b^3t^2}$ b) $\frac{6m}{a^3z^2}$ c) $\frac{9}{5x}$
7. a) $32x^{25}y^{10}z^5$ b) $\frac{27}{125}a^3b^9c^{21}$
8. a) $\frac{c}{2b^3}$ b) $\frac{y^5}{9c^2}$
9. $\frac{5}{2}x$
10. a) $8a^3$; $24a^2$ b) $27a^3$; $54a^2$
11. a) $2abc$ b) $4abc$ c) $8abc$

3. POLINOMI

Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi.

Es.: ....

Se il polinomio è formato da due monomi si chiama **binomio**.

Se il polinomio è formato da tre monomi si chiama **trinomio**.

Il **grado del polinomio** è quello del suo monomio di grado più alto.

Es.: $m^4 + m^2 + 1$ ha grado .....

$ab^2 + a^5b - 3a$ ha grado .....

Nel secondo polinomio si può precisare anche il *grado rispetto alle lettere*:

- il grado rispetto ad a è 5;
- il grado rispetto a b è 2.

Somma di polinomi.

ESEMPI:

$(3x^2 + 2x + 1) + (5x^2 - 3x + 8) =$ ....

$(8a^3 + 4a - 5) + \left(\frac{1}{2}a^3 - 2a^2\right) =$ ....

REGOLA	grazie alla proprietà associativa dell'addizione è possibile tralasciare le parentesi. Si sommano poi tra loro i monomi simili.

Sottrazione di polinomi.

ESEMPI:

$(3a + 5) - (8a^3 + 4a^2 - a) =$ ....

$(7m^3 + m - 2) - (-4m^2 - 2m + 9) =$ ....

REGOLA	quando le parentesi sono precedute dal segno -, si possono eliminare cambiando il segno a tutti i termini che sono racchiusi tra parentesi. Si eseguono poi le addizioni/sottrazioni tra monomi simili.

ESERCIZIO: cerca di semplificare saggiamente: prima togli le parentesi tonde, poi calcola quel che si può; poi togli le quadre ...

$m-\{m-[m-(m+1)]\}=$ ....

$3x+2-[5x+4-(-3x+2)]=$ ....

$\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}b-\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b\right)=$ ....

$\frac{2}{3}x-\left[2+\frac{7}{2}x-\left(\frac{4}{5}+2x\right)\right]=$ ....

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio.

ESEMPI:

$3x\bullet(2x-4)=$ ....

$-5x\bullet(8x^2-3x+2)=$ ....

REGOLA	il prodotto di un monomio per un polinomio si ottiene moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio.

Questa regola ti è nota come proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione (sottrazione).

ESERCIZI: calcola.

$3a\bullet(5a^2-3x+9)=$ ....

$5a^2\bullet(ax^2-5ax+x)=$ ....

$(2a^3-3a+5)\bullet(-4a^2)=$ ....

$(m^4-m^3+m^2-1)\bullet(-mt^2)=$ ....

Moltiplicazione di due polinomi.

ESEMPI:

$(2a+3b)\bullet(a-b)=$ ....

$(a^4+2a^3+3a-2)\bullet(b-5a)=$ ....

REGOLA	il prodotto di un polinomio con un polinomio si ottiene moltiplicando ogni termine del primo per tutti i termini del secondo.

ESERCIZI SUI POLINOMI

1. Determina il grado dei seguenti polinomi

$a) -x^2+5x^3+2x-3$ $b) -2xy^5+4x^2y^3-2xy+3t$ $c) 5xt^7y^6+4x^2t^3y^5+2$

2. Calcola.

$2(x-1)+3(2x-3)-(4x-5)=$
$2(u-1)-(3u+2)-2(2u-3)=$
$2y-3y[4-2(y-1)]=$
$4a-2a[5-3(a+2)]=$
$(m-n)(m+n)=$
$(4t-3)(4t+3)=$
$(3x+2y)(x-3y)=$
$(2m-6)(2m+6)=$
$(3x+2y)(3x-2y)=$
$(6x-4y)(5x+3y)=$

3. Calcola.

$5(x+h)-4-(5x-4)=$
$6(x+h)+2-(6x+2)=$
$3(x+h)^2+2(x+h)-(3x^2+2x)=$
$4(x+h)^2-5(x+h)-(4x^2-5x)=$

4. Siano $A=a^3-3a^2b^2+7ab^3-5b^2, B=3a^4-5a^3b-2a^2b^2+7ab^3 \text{ e } C=-a^4+a^3b+5b^2$

Calcola a) A + B - C b) A + C - B c) B - A + C

5. Problemi di geometria. (Non dimenticare il disegno.)

a) La larghezza di un rettangolo è di 5 centimetri inferiore della sua lunghezza. Se x rappresenta la lunghezza, scrivi un'espressione algebrica che rappresenti il perimetro del rettangolo. Semplifica l'espressione.

b) La lunghezza di un rettangolo é 8 metri in più della sua larghezza. Se x rappresenta la larghezza del rettangolo, scrivi un'espressione algebrica che rappresenti l'area del rettangolo. Semplifica l'espressione.

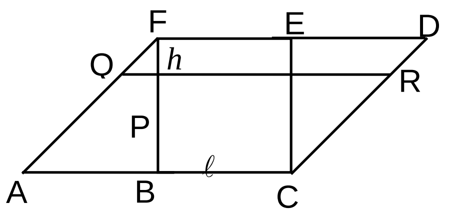
c) Un tubo cilindrico cavo é lungo 100 cm, spesso 1 cm e ha un raggio interno di x cm. Scrivi un'espressione algebrica che permetta di calcolare il volume della plastica usata per costruire il tubo. (Il volume di un cilindro di raggio r é dato da $V=\pi r^2h$).

d) Un contenitore per spedire dei computer viene costruito rivestendo un cubo di metallo con del polistirolo. Se il cubo di metallo ha lo spigolo di x centimetri e lo spessore del polistirolo é di 2 cm, scrivi un'espressione algebrica che rappresenti il volume di polistirolo utilizzato. (Il volume del cubo di spigolo s é dato da $V = s^3$)

e) E' dato un rettangolo ABCD con il lato AB lungo *m* e il lato BC lungo *n* ; sul lato DC considera un punto P che ha distanza *h* da D. Risolvere i seguenti quesiti:

- determinare l'area *S* del trapezio ABCP;
- determinare l'area *S* nel caso in cui ABCD sia un quadrato;
- determinare l'area *S* nel caso in cui ABCD sia un quadrato con il lato lungo 10 e P divida a metà il lato DC.

f) Sia ACDF un parallelogramma costruito accostando ad un quadrato BCEF, di lato ℓ, i due triangoli rettangoli rispettivamente e isosceli. Sul lato FB si fissa un punto P che ha una distanza *h* da F. Da P si traccia la parallela QR ad AC .
Trova l'espressione letterale più semplice per indicare l'area del parallelogramma ACRQ .



6. Esprimi sotto forma simbolica la somma tra il doppio della mia altezza aumentata di 5 cm e il doppio della mia altezza, aumentato di 5 cm (indica con una lettera la mia altezza e fa attenzione alle virgole e agli aggettivi maschili o femminili: dovrai usare delle parentesi!).

7. Un chilo di mele ha un certo prezzo x Fr. Sapendo che un chilo di uva costa il doppio di quanto costano le mele più 0.50 Fr, trova il costo di 3 Kg d'uva in funzione di x.

Soluzioni:

2. $4x-6$ | $16t^2-9$
$-5u+2$ | $3x^2-7xy-6y^2$
$6y^2-16y$ | $4m^2-36$
$6a^2+6a$ | $9x^2-4y^2$
m^2-n^2 | $30x^2-2xy-12y^2$

3. $5h$ $6h$ $6xh+3h^2+2h$ $8xh+4h^2-5h$

4. a) $a^3-5a^2b^2+14ab^3-10b^2+4a^4-6a^3b$
b) $a^3- a^2b^2- 4a^4+ 6a^3b$
c) $2a^4-4a^3b+a^2b^2- a^3+10b^2$

5. a) $4x-10$
b) x^2+8x
c) $100\pi(x+1)^2$
d) $(x+4)^3-x^3$
e) $(2m-h).n/2$
f) 75

7. $6x+1,50$

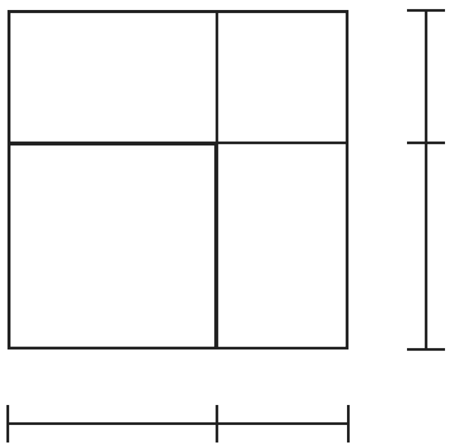
4. PRODOTTI NOTEVOLI

4.1 Il quadrato di una somma

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Verifica: $(a+b)^2 =$ ....

Interpretazione geometrica:



$(a+b)^2$ rappresenta l'area di un quadrato di lato $a+b$.
L'area di questo quadrato può essere scritta anche come area delle 4 figure che lo compongono:

$a^2 + 2ab + b^2$

Da cui segue:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ESEMPI:

$(x+1)^2 =$

$(a+5)^2 =$

$(x+y)^2 =$

$(x^3+1)^2 =$

$(2a+3)^2 =$

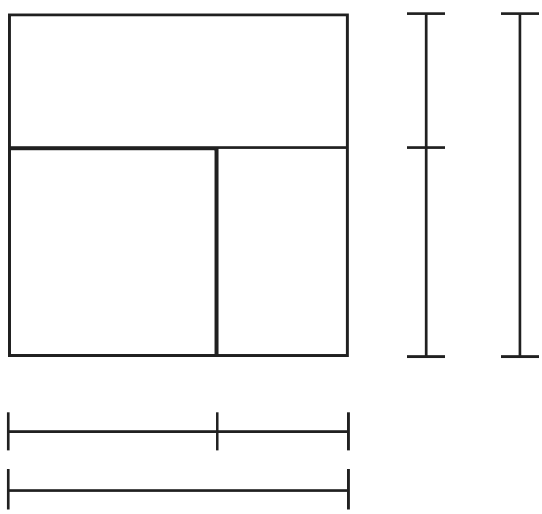
$(5+b)^2 =$

4.2 Il quadrato di una differenza

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Verifica: $(a-b)^2 =$ ....

Interpretazione geometrica:



$(a-b)^2$ rappresenta l'area di un quadrato di lato $a-b$.
L'area di questo quadrato può essere scritta anche come l'area del quadrato di lato a meno l'area dei due rettangoli:

$a^2 - ab - b \cdot (a-b) =$

$a^2 - ab - ab + b^2 =$

$a^2 - 2ab + b^2$

Da cui segue:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ESEMPI:

$(x-1)^2 =$ $\qquad$ $(b-12)^2 =$

$(x-5)^2 =$ $\qquad$ $(2a-16)^2 =$

$(3-2c)^2 =$ $\qquad$ $(25-x^3)^2 =$

4.3 La moltiplicazione di un'addizione per una differenza

$$\boxed{(a+b)\bullet(a-b)=a^2-b^2}$$

Verifica: $(a+b)\bullet(a-b) =$ ....

ESEMPI:

$(a+3)\bullet(a-3) =$ $\qquad$ $(z-2)\bullet(z+2) =$

$(x+2y)\bullet(x-2y) =$ $\qquad$ $(m^3-4)\bullet(m^3+4) =$

$(m+5)\bullet(m-5) =$ $\qquad$ $(15+x)\bullet(x-15) =$

4.4 (a + b) ^{n}, dove n rappresenta un numero naturale

$(a+b)^0 =$	1	1
$(a+b)^1 =$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2 =$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 =$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 ... ...
$(a+b)^4 =$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	... ...
$(a+b)^5 =$	....	... ...
$(a+b)^6 =$	....	... ...

Per sviluppare il prodotto (a + b) ^{n} , notiamo una regolarità

- nel progredire dei coefficienti dei termini letterali;
- negli esponenti di a e di b nei monomi che compongono lo sviluppo.

Il triangolo a destra prende il nome di triangolo di Pascal (1623-1662) per i francesi, in Italia è noto soprattutto come triangolo di Tartaglia (1500-1557), ma sembra che fosse già conosciuto dai cinesi nel XIII secolo.

Con il metodo visto sopra, prova a sviluppare le seguenti potenze:

(i) $(a-b)^2$ $\quad$ $(a-b)^3$ $\quad$ $(a-b)^4$ $\quad$ $(a-b)^5$

(ii) $(x+1)^2$ $\quad$ $(x+1)^3$ $\quad$ $(x+1)^4$ $\quad$ $(x+1)^5$

(iii) $(x-1)^2$ $\quad$ $(x-1)^3$ $\quad$ $(x-1)^4$ $\quad$ $(x-1)^5$

4.5 ESERCIZI SUI PRODOTTI NOTEVOLI

1. Calcola i seguenti prodotti notevoli.

a) $(x+1)^2$
b) $(b-4)^2$
c) $(a+3)^2$
d) $(m+y)^2$
e) $(z-15)^2$
f) $(c+13)^2$

2. Calcola.

a) $(4m+5)^2$
b) $(5z-2)^2$
c) $(3a+c)^2$
d) $(10x-7)^2$
e) $(9y+1)^2$
f) $(6x-9y)^2$

3. Calcola.

a) $(\frac{x}{3}+\frac{1}{2})^2$
b) $(\frac{4}{3}-\frac{x}{5})^2$
c) $(\frac{7}{5}x-\frac{5}{14})^2$
d) $(\sqrt{24}-\sqrt{6})^2$
e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
f) $(m\sqrt{12}+\sqrt{3})^2$

4. Esempi:

$43^2=(40+3)^2=40^2+2\bullet 40\bullet 3+3^2=1849$

oppure

$43^2=(50-7)^2=50^2-2\bullet 50\bullet 7+7^2=1849$

Calcola con uno dei due metodi visti nell'esempio :

53^2; 81^2; 49^2; 38^2; 87^2; 702^2

5. Calcola i seguenti prodotti.

a) $(x+1)(x-1)$
b) $(c+2)(c-2)$
c) $(4x+9y)(4x-9y)$
d) $(3m-5n)(3m+5n)$
e) $(2b+3a)(3a-2b)$
f) $(4z-5t)(5t+4z)$

6. Calcola.

a) $(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$
b) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
c) $(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})$
d) $(\frac{m}{3}-\frac{1}{4})(\frac{m}{3}-\frac{1}{4})$
e) $(6x+1{,}2)(6x-1{,}2)$
f) $(1{,}5-1{,}3y)(1{,}3y+1{,}5)$

7. Esempio: $53\bullet 47=(50+3)(50-3)=50^2-3^2=2491$

Prova a calcolare come nell'esempio (senza calcolatrice!).

$62\bullet 58$; $76\bullet 84$; $37\bullet 43$; $94\bullet 86$; $69\bullet 71$; $76\bullet 64$;

5. SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN UN PRODOTTO

Finora abbiamo visto che per semplificare un'espressione algebrica, cioè per scriverla nel modo più semplice possibile, si può calcolare (sommare, moltiplicare, dividere, calcolare le potenze). Un'altro procedimento molto utile è la scomposizione di un polinomio in un prodotto. Per scomporre un polinomio si possono utilizzare diversi metodi: vediamone alcuni.

5.1 La messa in evidenza.

Esempi:

$$ab^2 + 3ac + 2a^3b =$$

$$8m^2n - 4m^2p =$$

$$3a + 6 =$$

$$2x^2 + 4x + 8 =$$

$$5x^4 + 5x^3 =$$

Quando è possibile, si mettono in evidenza tutti i fattori comuni (numeri e lettere) tra i termini che compongono il polinomio. In questo modo si scrive il polinomio come un prodotto.

5.2 La messa in evidenza parziale.

Esempi:

$$ab + 3b + 2a + 6 =$$

$$3xy + 4x + 6y + 8 =$$

$$ax - 5x + 2ay - 10y =$$

$$m^2 - m + am - a =$$

$$ax + bx - a - b =$$

$$ab + ax - mb - mx =$$

$$a^2 - a^3 + 2 - 2a =$$

Prova a fare gli esercizi 1 e 2.

5.3 Riconoscere dei prodotti notevoli.

Ricordati che:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Esempi:

$$x^2 + 2xz + z^2 =$$
$$m^2 - 2my + y^2 =$$
$$4a^2 + 4ax + x^2 =$$
$$b^2 - 6bc - 9c^2 =$$
$$25r^2 - 70rs + 49s^2 =$$
$$81t^2 + 18t + 1 =$$
$$121y^2 - 132y + 36 =$$
$$z^2 - z + \frac{1}{4} =$$
$$u^2 - v^2 =$$
$$m^2 - 1 =$$
$$25 - t^2 =$$
$$1 - 4x^2 =$$
$$y^2 - 9 =$$
$$36e^2 - f^2 =$$
$$36k^2 + t^2 =$$
$$81m^2 - 100 =$$
$$144x^2 - 169y^2 =$$
$$x^2 - 2 =$$
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} =$$
$$\frac{16}{25}a^2 - \frac{25}{49}b^2 =$$
$$m^3 + n^3 =$$
$$c^3 - 1 =$$
$$c^3 + 1 =$$
$$a^3 + 64 =$$
$$b^3 - 8 =$$

5.4 Il trinomio tipico

Si chiama trinomio tipico il risultato della moltiplicazione tra due binomi (x+a) e (x+b), dove a e b sono numeri.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Proviamo a scomporre il trinomio tipico $x^2 + 10x + 24$ in un prodotto.

$$x^2 + 10x + 24 = (x+a) \bullet (x+b)$$

Dobbiamo determinare due numeri a e b in modo che $\begin{matrix} a \bullet b = 24 \\ a + b = 10 \end{matrix}$

Iniziamo a cercare tra i divisori di 24 due numeri che moltiplicati tra loro diano 24.

$24 \bullet 1 =$

$12 \bullet 2 =$

$8 \bullet 3 =$

$6 \bullet 4 =$

Questi due numeri devono soddisfare un'altra condizione: la loro somma deve essere 10. I due numeri non possono essere che 6 e 4, infatti: $\begin{matrix} 6 \bullet 4 = 24 \\ 6 + 4 = 10 \end{matrix}$.

Allora: $x^2 + 10x + 24 = (x+6) \bullet (x+4)$

Verifica: $(x+6) \bullet (x+4) = x^2 + 6x + 4x + 24 = x^2 + 10x + 24$.

Esempi:

$x^2 + 3x + 2 =$

$x^2 + 5x + 6 =$

$x^2 + 7x + 6 =$

$x^2 + 7x + 12 =$

$x^2 + 8x + 12 =$

$x^2 + 13x + 12 =$

$x^2 + 10x + 24 =$

$x^2 + 11x + 24 =$

$x^2 + 14x + 24 =$

I due numeri cercati possono essere anche entrambi negativi.

Esempi:

$x^2 - 6x + 5 =$

$x^2 - 7x + 10 =$

$x^2 - 11x + 10 =$

$x^2 - 9x + 18 =$

$x^2 - 19x + 18 =$

$x^2 - 11x + 18 =$

$x^2 - 10x + 16 =$

$x^2 - 17x + 16 =$

$x^2 - 8x + 16 =$

I due numeri possono anche essere uno positivo e l'altro negativo.

Esempi:

$x^2 + x - 2 =$

$x^2 - 2x - 3 =$

$x^2 + 3x - 4 =$

$x^2 - 5x - 6 =$

$x^2 + x - 6 =$

$x^2 + 5x - 6 =$

$x^2 - 2x - 24 =$

$x^2 + 10x - 24 =$

$x^2 - 5x - 24 =$

5.5 ESERCIZI

1. Scomponi i seguenti polinomi in prodotti, sfruttando la messa in evidenza.(Ricopia i polinomi su un altro foglio.)

$5x^6 - 3x^4 + x^3$	$2ab^2c - 6a^2b^2c^2 + 2a^3b$
$3y^4 - 2y^3 - y^2$	$8x^3y^2t + 4x^2y - 16x^4y^3$
$2t^5 + 9t^4 - t$	$5x^3y^4 + 10x^5y^2 - 15x^6y^2$
$2t^3 - 4t^2 + 6t$	$a^2x + 2xy - a^2b^3 - 2yb^3$
$6 + 27x + 12x^2$	$3x^4m^2 - ym^2 + 3x^4t^3 - yt^3$
$2xy + 3x^2y + 5xy^2$	$2ym^5 - x^2t^3 - x^2m^5 + 2yt^3$
$6x^3y^2z - 2x^4y^3z^2 + 4xy^5z$	$a^4 + 2a^3b + ab^3 + 2b^4$

2. Applica la messa in evidenza per scomporre in prodotti i seguenti polinomi.

$5x - ay + 5a - xy$	$ab - a - b + 1$
$mx + m^2 - x - m$	$ax - a + bx - b + cx - c$
$4x^2y + 6xy^2 - 6x^2 - 9xy$	$4x^2 - 12x + xy - 3y$
$a^2 + ab + a - ma - mb - m$	$2x^2 + 6x - xy - 3y - xz - 3z$
$x^4 - x^3 - x^2 + x$	$a^2 - ac - ab + bc$

3. Calcola i seguenti prodotti notevoli.

$(a+5)^2$	$(2x+2)(2x-2)$	$(12-3y)^2$
$(x+12)^2$	$(b-13)^2$	$(3a-2b)(3a+2b)$
$(x+4)(x-4)$	$(c+15)^2$	$(x^2-y^2)^2$

4. Scomponi i seguenti polinomi in prodotti notevoli.

x^2-36	$x^2+8x+16$	$9x^2-49$
$x^2-10x+25$	$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$	$x^2-\frac{9}{4}$
$4-x^2$	$x^2+20x+100$	$9x^2+6x+1$
$4x^2-x+\frac{1}{16}$	$\frac{9}{4}+3y+y^2$	y^2-2y+1

5. Scomponi in prodotti i seguenti trinomi tipici.

$x^2+3x-18$	$x^2+2x-48$	$x^2-10x+21$
$x^2+7x-18$	$x^2-8x-48$	$x^2-10x-24$
$x^2-17x-18$	$x^2-13x-48$	$x^2-10x-144$

6. Combinando le tecniche viste e un po' d'ingegno, prova a scomporre anche i seguenti polinomi.

$6x^2+4x+72$	$4z^2-28z+48$	$2y^3-22y^2+48y$
$16x^2y-8xy+y$	$4xy^2-12xy+9x$	$6s^2+36st+54t^2$
x^3y-9xy^3	$4u^3v-uv^3$	$3m^3-6m^3+15m$

7. Determina il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo tra i seguenti gruppi di monomi e polinomi.

a)	abc;	$2a^2b^4$;	$6a^5c^3$;
b)	$12xy^3$;	$18yz^7$;	$4xyz^3$;
c)	$16d^5km$;	$42d^5k^4$;	$28d^5k^2m^6p^3$;
d)	$3a+3$;	$5a+5$;	$7a+7$;
e)	x^2-25;	$2x+10$;	$3x^2+30x+75$;
f)	$3x+12$;	$7x+28$;	$42x+168$;
g)	$5x+10$;	$5x+15$;	$12x+24$;
h)	$4a^2-9$;	$16a+24$;	$30a-45$;
i)	$16a^2+56a+49$;	$8a+14$;	$28+16a$;
l)	$21a-63$;	$2a^2-18$;	$2a^2-12a+18$;

Soluzioni:

5.

$(x-3)(x+6)$	$(x-6)(x+8)$	$(x-7)(x-3)$
$(x-2)(x+9)$	$(x-12)(x+4)$	$(x-12)(x+2)$
$(x-18)(x+1)$	$(x-16)(x+3)$	$(x-18)(x+8)$

6.

$2(3x^2+2x+36)$	$4(z-4)(z-3)$	$2y(y-8)(y-3)$
$y(4x-1)^2$	$x(2y-3)^2$	$6(s+3t)^2$
$xy(x-3y)(x+3y)$	$uv(4u-v)(4u+v)$	$-3m(m^2-5)$

7.

MCD	mcm
a	$6a^5b^4c^3$
$2y$	$36xy^3z^7$
$2d^5k$	$336d^5k^4m^6p^3$
$a+1$	$105(a+1)$
$x+5$	$6(x+5)^2(x-5)$
$x+4$	$42(x+4)$
1	$60(x+2)(x+3)$
1	$120(2a+3)(2a-3)$
$4a+7$	$4(4a+7)^2$
$a-3$	$42(a-3)^2(a+3)$

6. FRAZIONI ALGEBRICHE

6.1 Analogie con Q

Addizione

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{10+6}{15}=\frac{16}{15}$$

$$\frac{5}{4}+\frac{11}{4}=\frac{5+11}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$-$

$-$

$$\frac{5}{42}+\frac{7}{36}=\frac{30+49}{252}=\frac{79}{252}$$

Per determinare il denominatore comune si calcola il mcm tra i denominatori, ad es. con il metodo della scomposizione in fattori primi.

$42=2\bullet 3\bullet 7$

$36=2^2\bullet 3^2$

$mcm(42;36)=2^2\bullet 3^2\bullet 7=252$

$$\frac{5a}{b}+\frac{3x}{2}=\frac{10a+3bx}{2b}$$

$$\frac{5a}{xy}+\frac{8a}{xy}=\frac{5a+8a}{xy}=\frac{13a}{xy}$$

$$\frac{3b}{x}+\frac{4c+b}{y}=\frac{3by+x(4c+b)}{xy}=$$

$$=\frac{3by+4cx+bx}{xy}$$

$$\frac{3x}{ab}+\frac{4x}{a^2bc}+\frac{5x}{a^3b^2}=$$

$$=\frac{3a^2bcx+4abx+5cx}{a^3b^2c}$$

$mcm(ab;a^2bc;a^3b^2)=a^3b^2c$

$$\frac{2x}{5y^2}+\frac{3y}{x}+\frac{8y}{x^2}=$$

$$=\frac{2x^3+15xy^3+40y^3}{5x^2y^2}$$

Sottrazione (attenzione ai segni!)

$$\frac{5x}{y}-\frac{2-x}{x}=\frac{5x^2-y(2-x)}{xy}=\frac{5x^2-2y+xy}{xy}$$

$$y-\frac{5x-2y}{x}=\frac{xy-(5x-2y)}{x}=\frac{xy-5x+2y}{x}$$

Moltiplicazione

$$\frac{3}{4}\bullet\frac{5}{7}=\frac{3\bullet 5}{4\bullet 7}=\frac{15}{28}$$

$$\frac{15}{8}\bullet\frac{14}{25}=\frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{ab}{cd}\bullet\frac{a^2b}{c^4d^2}=\frac{a^3b^2}{c^5d^3}$$

$$\frac{x^2y^3}{m^4n^5}\bullet\frac{m^3n^4p^2}{xy^2z}=\frac{\qquad}{\qquad}$$

Divisione

$$\frac{4}{5}\div\frac{32}{15}=\frac{4}{5}\bullet\frac{15}{32}=\frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{ab^2}{5c}\div\frac{ab^3}{c^2}=\frac{ab^2}{5c}\bullet\frac{c^2}{ab^3}=\frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{x^4y}{mn}\div\frac{x^3y^2}{m^3n^2}=\frac{x^4y}{mn}\bullet\frac{m^3n^2}{x^3y^2}=\frac{\quad}{\quad}$$

6.2 Semplificazione di frazioni algebriche

Una frazione algebrica è un'espressione del tipo A(x)/B(x), dove A(x) e B(x) sono dei polinomi e B(x) non è nullo.
Le operazioni con le frazioni algebriche sono analoghe a quelle con le frazioni numeriche.
È utile anche con le frazioni algebriche lavorare con delle frazioni ridotte ai minimi termini.
Iniziamo quindi a vedere come è possibile semplificare una frazione algebrica.
Per poter semplificare una frazione algebrica occorre scomporre sia il numeratore che il denominatore (se possibile!) in prodotti, utilizzando le tecniche di scomposizione viste finora:

- la messa in evidenza;
- riconoscere dei prodotti notevoli;
- la scomposizione in un trinomio tipico.

Esempio 1: con la messa in evidenza. (Usa la riga per tracciare la linea di frazione!)

$$\frac{x^2+2x}{x+2}=\frac{x(x+2)}{x+2}=x$$

$$\frac{5a^2b+ab^2}{5a^2+ab}=$$

$$\frac{cd+2c+4c^2d}{cd}=$$

Esempio 2: riconoscendo i prodotti notevoli.

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}=$$

$$\frac{2x^2-20x+50}{x^2-25}=$$

Esempio 3: scomponendo il trinomio tipico.

$$\frac{a^2+5a+6}{a^2+7a+10}=$$

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-12}=$$

$$\frac{x^2+10x+24}{x^2-5x-36}=$$

Osservazioni:

- a(b+2) è considerata più semplice dell'espressione ab+2a;
- 1+b/a è considerata più semplice dell'espressione (a+b)/a

6.3 Addizione di frazioni algebriche

Per addizionare o sottrarre delle frazioni algebriche, *occorre ricondurle ad uno stesso denominatore*, poi addizionare o sottrarre i numeratori, analogamente al procedimento utilizzato per le frazioni numeriche.
Se possibile, il risultato va poi semplificato.

Esempi. (Usa la riga per tracciare le linee di frazione!)

$$\frac{a}{2b}+\frac{a+3}{2b}=$$

$$\frac{x+5}{xy}+\frac{x-2}{xz}=$$

$$\frac{3}{a+3}+\frac{a}{a+3}=$$

$$\frac{2}{x^2+8x+16}-\frac{3}{x^2-16}=$$

6.4 Moltiplicazione di frazioni algebriche

La regola per la moltiplicazione è analoga a quella per le frazioni numeriche. Prima di moltiplicare tra di loro i numeratori e tra loro i denominatori è però utile scomporre sia i numeratori che i denominatori in prodotti e semplificare.
Esempi.

$$\frac{x+5}{x+3}\bullet\frac{x-3}{x+5}=$$

$$\frac{x+5}{x+3}\bullet\frac{6x+18}{4x+20}=$$

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x-5}\bullet\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x+4}=$$

$$\frac{x+5}{m^3}\bullet\frac{xm^4}{2x+10}\bullet\frac{2}{3x^2}=$$

6.5 La divisione di frazioni algebriche

La regola è analoga a quella per la divisione tra frazioni numeriche. Vediamo alcuni esempi.

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}\div\frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}=$$

$$\frac{-2x^2+8x}{3x-3}\div\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}=$$

$$\frac{24x^2z^2m^3}{7a^3b^4}\div\frac{-6xm^4}{35a^2b^3}=$$

$$\frac{1}{3a-3b}\div\frac{2a}{5b-5a}=$$

6.6 Esercizi

Ricopia ogni espressione su di un foglio; usa la riga per tracciare le linee di frazione.

1. Semplifica.

a) $\dfrac{a^3+4a}{2a^2b+8b}$ $\quad\dfrac{ac+2a}{c^2+5c+6}$ $\quad\dfrac{a^2-b^2}{ab-b^2}$

b) $\dfrac{12x+72}{12x+96}$ $\quad\dfrac{x^2+7x+10}{2x+10}$ $\quad\dfrac{x^2-4}{5x+10}$

c) $\dfrac{a^2+14a+33}{2a^3+26a^2+44a}$ $\quad\dfrac{a^2+2a-15}{a^2+3a-10}$ $\quad\dfrac{y^2+y-20}{yz^2-4z^2}$

2. Calcola e semplifica il risultato.

a) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-5}=$; $\quad 1-\dfrac{1}{x+1}=$

b) $\dfrac{a+5}{a}+\dfrac{a+2}{b}-\dfrac{a^2+5b}{ab}=$; $\quad\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{x^2+y^2}{xy}=$

c) $1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a-1}=$; $\quad\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a}{a^2-1}=$

d) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}=$; $\quad\dfrac{1}{x^2+5x+6}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}=$

e) $\dfrac{1}{2p+4}+\dfrac{3}{p^2+4p+4}-\dfrac{p}{p^2-4}=$; $\quad\dfrac{5}{m^2-3m-40}-\dfrac{8}{m^2-64}=$

f) $\dfrac{3}{x^2-9}-\dfrac{2}{x^2+6x+9}=$; $\quad\dfrac{y}{y-z}-\dfrac{2y}{y+z}+\dfrac{3yz}{z^2-y^2}=$

g) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(c-b)}-\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}=$

3. Calcola. (Ricorda: nelle moltiplicazioni è utile semplificare prima di moltiplicare.)

a) $\dfrac{5t+10}{t^3}\bullet\dfrac{t^4}{t+2}=$; $\quad\dfrac{2x-y}{x^2-y^2}\bullet\dfrac{x+y}{4x^2-y^2}=$

b) $\dfrac{3x+6}{5x+5}\bullet\dfrac{10x+10}{x^2-6x-16}=$; $\quad\dfrac{c+2}{c^2+8c-9}\bullet\dfrac{2c+18}{2c^2-8}=$

c) $\dfrac{a+b}{a^2+2ab+b^2}\bullet\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=$; $\quad\dfrac{3a+15}{a+2}\bullet\dfrac{a^2-4}{9a-18}=$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{5x^2-45}\div\dfrac{x^2+5x+6}{11x+22}=$; $\quad\dfrac{x^2}{12}\div\dfrac{4x^3-25x}{6x-15}=$

e) $\left[\dfrac{x-1}{x^2-4}\bullet\dfrac{2x+4}{x^2-1}\right]\div\dfrac{2x+2}{x^2-4x+4}=$; $\quad\left[\dfrac{t-3}{t^2-2t-3}\bullet\dfrac{t^2-2t+1}{t^2-2t-3}\right]\div\dfrac{t^2-9}{t^2-1}=$

f) $\left[\dfrac{b-1}{21-4a-a^2}\bullet\dfrac{b-2}{b-b^3}\right]\div\dfrac{2-b}{a^2+6a-7}=$; $\quad\left[\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^2\bullet\dfrac{2}{x-1}\right]\div\dfrac{x^2+2x+1}{x^3}=$

4. Semplifica le seguenti espressioni algebriche.

a) $\left\{\left[(3x-1)^2-4x^2\right](x-1)+10x^2-x\left(x^2+3\right)\right\}\div(4x-1)=$

b) $\left(\frac{2x^2-4x}{x^2-4}\bullet\frac{x^2-x-6}{3x+1}-\frac{x(x-1)}{3x+1}\right)\div\frac{x-5}{x}=$

c) $\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{x^2-3}{x^2+x}\right)\div\frac{x^2-4}{x}+\frac{1}{x^2+2x}\right]\bullet\left(x^3+2x^2+x+2\right)=$

Soluzioni:

Esercizio 1:

a) $\frac{a}{2b}$ $\quad\frac{a}{c+3}$ $\quad\frac{a+b}{b}$

b) $\frac{x+6}{x+8}$ $\quad\frac{x+2}{2}$ $\quad\frac{x-2}{5}$

c) $\frac{a+3}{2a(a+2)}$ $\quad\frac{a-3}{a-2}$ $\quad\frac{y+5}{z^2}$

Esercizio2:

a) $\frac{3x-8}{(x+2)(x-5)}$ $\quad\frac{x}{x+1}$

b) $\frac{b+2}{b}$ $\quad 0$

c) $\frac{a^2+2a-1}{a(a-1)}$ $\quad\frac{-1}{(a+1)(a-1)}$

d) $\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$ $\quad 0$

e) $\frac{-p^2+2p-16}{2(p+2)^2(p-2)}$ $\quad\frac{-3m}{(m-8)(m+8)(m+5)}$

f) $\frac{x+15}{(x-3)(x+3)^2}$ $\quad\frac{-y^2}{(y-z)(y+z)}$

g) $\frac{2}{(a-b)(a-c)}$

Esercizio 3:

a) $5t$ $\quad\frac{1}{(x-y)(2x+y)}$

b) $\frac{6}{x-8}$ $\quad\frac{1}{(c-1)(c-2)}$

c) 1 $\quad\frac{a+5}{3}$

d) $\frac{11}{5(x-3)}$ $\quad\frac{x}{4(2x+5)}$

e) $\frac{x-2}{(x+1)^2}$ $\quad\frac{(t-1)^3}{(t+1)(t-3)^2(t+3)}$

f) $\frac{-(a-1)}{b(a-3)(b+1)}$ $\quad\frac{2(x-1)}{x}$

Esercizio 4:

a) x^2+1 $\quad$ b) $\frac{x^2}{3x+1}$ $\quad$ c) $\frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{x}$

6.7 APPROFONDIMENTO: La divisione di un polinomio per un polinomio

1. Tecniche di calcolo

La divisione tra polinomi é analoga a quella tra due numeri interi. Riprendiamo quindi la divisione euclidea tra due numeri interi.

$$a \div b = q$$
$$r$$

con $a \neq 0$ e $r \angle b$.

Da ciò si ricavano le identità $\boxed{\begin{array}{l} a = b \bullet q + r \\ \dfrac{a}{b} = q + \dfrac{r}{b} \end{array}}$.

Esempio numerico:

$157 \div 8 =$

Esempi di divisioni tra polinomi:

$\left(x^2 + 5x + 6\right) \div \left(x + 3\right) =$

$\left(2x^4 + 3x^3 - x - 5\right) \div \left(x + 2\right) =$

$\left(5 + 4x^3 - 3x\right) \div \left(2x - 3\right) =$

$\left(6x^2 - 30 + 9x^3\right) \div \left(3x - 4\right) =$

Il *metodo di Ruffini* per dividere un polinomio P(x) per x - a. Partiamo da due esempi:

$\left(2x^4 + 3x^3 - x - 5\right) \div \left(x + 2\right) =$

$\left(3x^4 - 11x^3 - 18x + 8\right) \div \left(x - 4\right) =$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 3 & 0 & -1 & -5 \\ & & -4 & 2 & -4 & 10 \; + \\ \hline -2 & 2 & -1 & 2 & -5 & 5 \end{array}$$

b)

$2x^4 + 3x^3 - x - 5 = \left(2x^3 - x^2 + 2x - 5\right)\left(x + 2\right) + 5$

Verifica:

ESERCIZI

1. Risolvi con *entrambi* i metodi le seguenti divisioni.

$(x^2+3x-7)\div(x-2)$ $\quad$ $(x^2+3x-3)\div(x-3)$

$(4x^2+10x-9)\div(x+3)$ $\quad$ $(2x^2+7x-5)\div(x+4)$

$(2x^3-3x+1)\div(x-2)$ $\quad$ $(x^3+2x^2-3x-4)\div(x+2)$

2. Risolvi con il secondo metodo.

$$(3x^4-x-4)\div(x+1)$$
$$(x^5+1)\div(x+1)$$
$$(3x^4+2x^3-4x-1)\div(x+3)$$
$$(2x^6-13x^5+75x^3+2x^2-50)\div(x-5)$$
$$(x^4-3x^3-5x^2+6x-3)\div(x-4)$$
$$(4x^6+20x^5-24x^4-3x^2-13x+30)\div(x+6)$$
$$(5x^4-2x^2-3)\div(x-1)$$
$$(x^4-16)\div(x-2)$$
$$(4x^3+4x^2-7x-6)\div\left(x+\frac{3}{2}\right)$$
$$(4x^4+2x^3-6x^2-5x+1)\div\left(x+\frac{1}{2}\right)$$
$$(2x^3-5x^2+6x+3)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$(3x^3-x^2+x+2)\div\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

2. Alcune precisazioni sull'algoritmo della divisione e sul resto

L'algoritmo della divisione.
Per ogni polinomio P(x) di grado maggiore di 0 e ogni numero a, esiste un unico polinomio Q(x) di un grado più piccolo di P(x) e un unico numero r in modo che

$$P(x)=(x-a)Q(x)+r$$

Il polinomio Q(x) viene chiamato il quoziente.
x-a è il divisore.
r è il resto, può assumere anche il valore zero: in tal caso si dice che P(x) è divisibile per x-a.

Teorema del resto.
Se r è il resto della divisione tra P(x) e x-a, allora P(a)=r.

Dimostrazione.
Dall'algoritmo per la divisione sappiamo che $P(x)=(x-a)Q(x)+r$. Quest'uguaglianza è valida per tutti i numeri reali x. Sostituendo x = r, possiamo osservare che

$$
\begin{aligned}
P(a) &= (a-a)Q(a)+r \\
&= 0 \bullet Q(a)+r \\
&= r
\end{aligned}
$$

Quindi possiamo dire che il valore del polinomio P(x) per x = a è lo stesso del resto r ottenuto dividendo P(x) per x-a, che è quanto asserito dal teorema.

Osservazione: se P(a) = 0, a viene detto zero del polinomio e P(x) è divisibile per x-a.

Esempi: due metodi per determinare il valore di un polinomio.

■ Dato il polinomio $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$, determina P(-3) :

i) con il metodo della divisione di Ruffini (1765-1822);
ii) calcolando direttamente P(-3).

i) Con il metodo di Ruffini si esegue la divisione tra P(x) e x - (-3)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 10 & 0 & 19 & 5 \\
 & & -12 & 6 & -18 & -3 \\
\hline
-3 & 4 & -2 & 6 & 1 & 2
\end{array}
\longrightarrow 2 = r = P(-3)
$$

ii) $P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 5 = 2$

■ Ripeti lo stesso esempio per $P(x) = 3x^4 - 16x^2 - 3x + 7$ e $x = -2$.

7. EQUAZIONI

7.1 Da un problema ad un'equazione

Ecco il bilancio annuo di una ditta produttrice di apparecchiature per dentisti, che riporta le entrate e le uscite in migliaia di franchi:

ENTRATE		USCITE	
Vendita di immobili	800	Stipendi del personale	2000
Interessi sul capitale	400	Costi di impianto	200
Ricavo per ogni apparecchio venduto	1,2	Costo del materiale e della energia utilizzata per ogni apparecchio	0,3
		Costo del collaudo e del trasporto per ogni apparecchio	0,07
		Percentuale data al rappresentante per ogni apparecchio venduto	0,03

Quante apparecchiature bisogna produrre e vendere per chiudere il bilancio in parità (entrate uguali alle uscite) ?
Traduciamo il problema in simboli matematici:

- fissa l'attenzione sul <u>numero da determinare</u> (<u>incognito</u>) con una lettera (ad esempio la x);
- valuta <u>i dati</u> (in questo caso le entrate totali e le uscite totali); osserva che alcuni di questi dati sono fissi e non dipendono dal numero x, altri invece dipendono dalla x

- totale entrate = ...

  totale uscite = ...

- esprimi il problema come <u>uguaglianza</u> di espressioni contenenti la x , in questo caso totale entrate =totale uscite

  .... = ...

  ottieni <u>un'equazione nell'incognita x</u>: prova a risolverla

  ....
  ....
  ....
  ....

verifica che se il numero di apparecchi prodotti è x=1250, il bilancio è realmente in parità.

7.2 Alcune definizioni

Definizioni: si dice **equazione ad un'incognita** un'uguaglianza della forma f(x) = g(x), dove f e g sono delle funzioni numeriche da un insieme di partenza A verso un insieme di arrivo B.

f(x) e g(x) si dicono **membri** dell'equazione.

La **risoluzione** di un'equazione consiste nel determinare gli elementi di A (soluzioni) che, sostituiti all'elemento sconosciuto x (chiamato **incognita**), verificano l'uguaglianza. Tutte le **soluzioni** di un'equazione formano l'insieme delle soluzioni.

Definizione: due equazioni si dicono **equivalenti** se in uno stesso insieme di definizione hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Nella risoluzione algebrica delle equazioni, le equazioni vengono trasformate successivamente in equazioni equivalenti, secondo i principi di equivalenza:

l'equazione f(x) = g(x) è equivalente alle equazioni
(i) **k** . f(x) = **k** . g(x) con k $\in$ R \ {0}
(ii) f(x) + **h(x)** = g(x) + **h(x)** dove h(x) è una funzione razionale.

7.3 Equazioni di primo grado in R, con un'incognita

Iniziamo con alcuni esempi di equazioni che avrai già sicuramente risolto alla scuola media: risolvile giustificando tutti i passaggi.

$a) 4x-2(x+5)=3-2(3x+2)$	$b) \frac{x}{2}-\frac{x+3}{4}=\frac{1+x}{4}-\frac{1}{5}$
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

$c)\ \frac{2x+3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8x-3}{12} + 1$ $d)\ \frac{2x-3}{9} - \frac{x+5}{6} = \frac{3-x}{2} + 1$

....

....

....

....

....

....

Come puoi osservare, tutte queste equazioni vengono ricondotte nella loro forma normale, che è del tipo **ax + b = cx + d** e vengono poi risolte applicando le proprietà del corpo (R; +; **.**).

7.4 Esempi

Es. 1 $S_1 = \{x \in Z \,/\, x^2 = 9\} =$.........................

$S_2 = \{x \in R \,/\, x^2 = -4\} =$.........................

Es. 2 Determina quel numero, il cui quadrato è $\frac{1}{16}$.

Si ha l'equazione: ....

In **N**: S = ...

In **Z**: S = ...

In **Q**: S = ...

In **R**: S = ...

Dagli esempi visti sopra, osserviamo che un'equazione può avere:

- **nessuna** soluzione (l'equazione si dice **impossibile**)
- **una sola** soluzione (l'equazione si dice **determinata**)
- **un numero finito** di soluzioni (anche in questo caso l'equazione si dice **determinata**)
- **infinite** soluzioni (l'equazione si dice **indeterminata**).

Es. 3 Risolvi le seguenti equazioni in N; Z; Q; R :

	N	Z	Q	R
$3x = 1$				
$3 - x = 5$				
$x^2 = 1$				
$x^2 = 2$				

7.5 Alcuni esempi di messa in equazione di problemi

La risoluzione di equazioni è uno strumento potente per risolvere alcuni problemi che affrontati senza equazioni richiederebbero dei ragionamenti molto complessi. Vediamo due esempi di problemi ad un'incognita che richiedono **la messa in equazione.**

1. In una biblioteca i libri di matematica sono 2/7 del totale e superano di 325 quelli di inglese, che sono 1/4 del totale.
   Quanti libri conta quella biblioteca?

   Obiettivo: bisogna trovare il numero di libri della biblioteca; si tratta di un'incognita (dato non conosciuto) e in linguaggio matematico si indica con ....

   Equazione:

   ....

   ....

   ....

   ....

   Risposta: ....

2. Giacomo e Giulia sono entrati in un grande magazzino con la stessa somma di denaro.
   Giacomo spende i 3/4 di quanto possiede e Giulia i suoi 2/5.
   Trova la loro somma iniziale se, dopo i loro acquisti, Giulia ha 8,40 Fr in più di Giacomo.

   Obiettivo: ....

   Equazione:

   ....

   ....

   ....

   ....

   Risposta:

   ....

7.6 Esercizi

Nei seguenti problemi indica cosa rappresenta l’incognita, poi prova a scrivere l’equazione che risolve il problema. Risolvi poi l’equazione, controllando se le soluzioni trovate possono aver senso.

1. Un numero è più piccolo di un altro di 15 unità. Il triplo del primo sommato la doppio del secondo dà 80. Quali sono i due numeri?

2. Una giacca è in vendita a 195 Fr. Qual era il prezzo originale se la giacca è stata scontata del 25%?

3. Il signor Gianni investe 30'000 Fr in due titoli che rendono rispettivamente un interesse semplice del 18,5% e del 13%. Dopo un anno l’interesse totale dei due titoli ammonta 5'000 Fr. Quale è stato l’investimento iniziale in ognuno dei due titoli?

4. Una macchinetta distributrice di bibite calde accetta monete da 50 centesimi, 1 e 2 Fr. Svuotando il contenitore delle monete si trovano in tutto 1000 Fr. Trova il numero di monete di ogni tipo, sapendo che le monete d1 1 Fr sono il triplo di quelle da 50 cts e che quelle da 2 Fr sono 50 meno di quelle da 50 cts.

5. Determina quale capitale deve essere investito per 4 anni al tasso d’interesse semplice del 5% per ottenere un montante di 2400 Fr.

6. A quale tasso d’interesse semplice annuale deve essere impiegato un capitale di 1000 Fr per raddoppiare in 10 anni?

7. Dopo quanto tempo potrò ritirare 42'000 Fr, se oggi ne deposito 30'000 al tasso d’interesse semplice del 4 ¼ %?

8. Degli abitanti di una certa città i 3/8 non hanno ancora compiuto i 21 anni, i 5/12 hanno un'età compresa tra i 21 e i 50 anni ed i rimanenti 50'000 abitanti superano i 50 anni.
   Quanti sono gli abitanti di quella città?

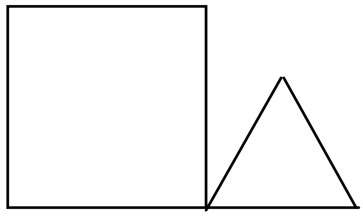
9. Ho comprato un televisore versando subito metà del suo prezzo e pagando il resto, maggiorato del 9%, in 5 rate di 87,20 Fr.
   Quale era il prezzo iniziale del televisore?

10. In un gioco a quiz si guadagnano 100 Fr per ogni risposta esatta e se ne perdono 150 per ogni risposta errata. Dopo 16 domande un giocatore riceve 350 Fr.
    Quante risposte esatte ha dato?

11. Un numero supera di 1 i 4/3 di un altro. Sapendo che la differenza tra il primo ed il secondo è 4 trova questi numeri.

12. E' dato un segmento MN lungo 21. Determinare su MN un punto P in modo che il quadrato costruito su MP e il triangolo equilatero costruito su PN abbiano lo stesso perimetro.

Prima di impostare l'uguaglianza algebrica che rappresenta il problema rappresentiamolo graficamente:



13. Una piattaforma di perforazione per la ricerca del petrolio nell'oceano indiano è posta in modo che 1/5 della sua altezza sia nella sabbia, 600 m siano nell'acqua e 2/3 di essa siano in aria. Qual è l'altezza totale della piattaforma?

14. Ora tocca a voi inventare due problemi.

7.7 Equazioni fratte

Nelle equazioni fratte, l'incognita compare anche al denominatore. Questo ci deve far riflettere sulle soluzioni che troveremo: alcune di esse potrebbero far diventare uguale a zero il denominatore.
In una frazione un denominatore può essere uguale a zero?
Se saprai rispondere alla domanda precedente potrai capire perché non è possibile accettare quelle soluzioni che annullano un denominatore.
Nella risoluzione delle equazioni fratte, inizieremo a trovare tutti quei valori dell'incognita che annullano i denominatori: li chiameremo **valori eccezionali** (**V.E.**)

Esempi di equazioni fratte.

$a)\ \frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

$b)\ \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{1}{x^2-1}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

$c)\ \frac{x+3}{x-2}-\frac{x-2}{x+4}=\frac{30}{x^2+2x-8}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

$d)\ 5-\frac{2x}{3-x}=\frac{6}{x-3}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

7.8 Esercizi: risolvi le seguenti equazioni.

1. $3(x+2)=5(x-6)$ $\quad S=\{18\}$
2. $5x+10(x-2)=40$ $\quad S=\{4\}$
3. $5+4(t-2)=2(t+7)+1$ $\quad S=\{9\}$
4. $5x-(7x-4)-2=5-(3x+2)$ $\quad S=\{1\}$
5. $x(x+2)=x(x+4)-12$ $\quad S=\{6\}$
6. $x(x+4)-2=x^2-4(x+3)$ $\quad S=\left\{-\frac{5}{4}\right\}$
7. $3-\frac{2x-3}{3}=\frac{5-x}{2}$ $\quad S=\{9\}$
8. $\frac{x-2}{3}+1=\frac{x}{7}$ $\quad S=\left\{-\frac{7}{4}\right\}$
9. $5-\frac{2x-1}{4}=\frac{x+2}{3}$ $\quad S=\left\{\frac{11}{2}\right\}$
10. $\frac{x+3}{4}-\frac{x-4}{2}=\frac{3}{8}$ $\quad S=\left\{\frac{19}{2}\right\}$
11. $0{,}1(x-7)+0{,}05x=0{,}08$ $\quad S=\left\{\frac{26}{5}\right\}$
12. $0{,}4(x+5)-0{,}3x=17$ $\quad S=\{150\}$
13. $0{,}3x-0{,}04(x+1)=2{,}04$ $\quad S=\{8\}$
14. $0{,}02x-0{,}5(x-2)=5{,}32$ $\quad S=\{-9\}$
15. $\frac{3x}{2}-\frac{2-x}{10}=\frac{5+x}{4}+\frac{4}{5}$ $\quad S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$
16. $\frac{2x-3}{9}-\frac{x+5}{6}=\frac{3-x}{2}+1$ $\quad S=\left\{\frac{33}{5}\right\}$
17. $\frac{1}{m}-\frac{1}{9}=\frac{4}{9}-\frac{2}{3m}$ $\quad S=\{3\}$
18. $\frac{2}{3x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x}+\frac{4}{3}$ $\quad S=\{-4\}$
19. $\frac{5x}{x+5}=2-\frac{25}{x+5}$ $\quad S=\{\ \}$
20. $\frac{3}{2x-1}+4=\frac{6x}{2x-1}$ $\quad S=\{\ \}$
21. $\frac{2x}{10}-\frac{3-x}{14}=\frac{2+x}{5}-\frac{1}{2}$ $\quad S=\left\{\frac{8}{5}\right\}$
22. $\frac{3x}{24}-\frac{2-x}{10}=\frac{5+x}{40}-\frac{1}{15}$ $\quad S=\left\{\frac{31}{24}\right\}$
23. $\frac{1}{3}-\frac{s-2}{2s+4}=\frac{s+2}{3s+6}$ $\quad S=\{2\}$
24. $\frac{n-5}{6n-6}=\frac{1}{9}-\frac{n-3}{4n-4}$ $\quad S=\left\{\frac{53}{11}\right\}$
25. $\frac{3x}{2-x}+\frac{6}{x-2}=3$ $\quad S=\{\ \}$
26. $5-\frac{2x}{3-x}=\frac{6}{x-3}$ $\quad S=\{\ \}$
27. $\frac{5t-22}{t^2-6t+9}-\frac{11}{t^2-3t}-\frac{5}{t}=0$ $\quad S=\{-4\}$
28. $\frac{5}{x-3}=\frac{33-x}{x^2-6x+9}$ $\quad S=\{8\}$
29. $\frac{1}{x^2-x-2}-\frac{3}{x^2-2x-3}=\frac{1}{x^2-5x+6}$ $\quad S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$
30. $\frac{10}{x}-\frac{22}{3x-x^2}=\frac{10x-44}{x^2-6x+9}$ $\quad S=\{-4\}$
31. $3{,}142x-0{,}4835(x-4)=6{,}795$ $\quad S=\{1{,}83\}$
32. $0{,}0512x+0{,}125(x-2)=0{,}725x$ $\quad S=\{-0{,}4555\}$
33. $\frac{2{,}32x}{x-2}-\frac{3{,}76}{x}=2{,}32$ $\quad S=\{-8{,}55\}$
34. $\frac{6{,}08}{x}+4{,}49=\frac{4{,}49x}{x+3}$ $\quad S=\{-1{,}072\}$
35. $a_n=a_1+(n-1)d$ incognita d
36. $F=\frac{9}{5}C+32$ incognita C
37. $\frac{1}{f}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ incognita f
38. $A=2ab+2ac+2bc$ incognita a
39. $y=\frac{2x-3}{3x+5}$ incognita x
40. $x=\frac{3y+2}{y-3}$ incognita y

8. SISTEMI DI DUE EQUAZIONI A DUE INCOGNITE

8.1 Due problemi di capitalizzazione semplice

i)	Un capitale impiegato ad interesse semplice per 8 mesi ha dato un interesse di 48 Fr; sapendo che lo stesso capitale, impiegato per 10 mesi allo stesso tasso, darebbe un montante di 1260 Fr, trova il tasso d'interesse annuale e il capitale.

Dati:

$$C_1 = x \qquad C_2 = x$$
$$i_1 = y \qquad i_2 = y$$
$$n_1 = \frac{8}{12} \qquad n_2 = \frac{10}{12}$$
$$I_1 = 48 \text{ Fr} \qquad I_2 = ?$$
$$M_1 = ? \qquad M_2 = 1260 \text{ Fr}$$

Dalle serie di dati, ricaviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x \bullet \dfrac{8}{12} \bullet y = 48 & \text{(I)} \\ x \bullet \left(1 + \dfrac{10}{12} y\right) = 1260 & \text{(II)} \end{cases}$$

ii)	Due capitali, impiegati ad interesse semplice, il primo al 10% annuo per 4 mesi e il secondo al 15% annuo per 3 mesi, hanno dato un interesse complessivo di 70'375 Fr. Sapendo che impiegando il primo capitale al 15% per 3 mesi e il secondo al 10% per 4 mesi si avrebbero 1625 Fr in più d'interesse totale, calcola i due capitali.

Dati: prima forma d'impiego:

$$C_1 = x \qquad C_2 = y$$
$$i_1 = 0{,}10 \text{ (annuo)} \qquad i_2 = 0{,}15 \text{ (annuo)}$$
$$n_1 = \frac{4}{12} \qquad n_2 = \frac{3}{12}$$
$$I_1 = ? \qquad I_2 = ?$$
$$I_1 + I_2 = 70'375 \text{ Fr}$$
$$M_1 = ? \qquad M_2 = ?$$

seconda forma d'impiego:

$$C_1 = x \qquad C_2 = y$$
$$i_1 = 0{,}15 \text{ (annuo)} \qquad i_2 = 0{,}10 \text{ (annuo)}$$
$$n_1 = \frac{3}{12} \qquad n_2 = \frac{4}{12}$$
$$I_1 = ? \qquad I_2 = ?$$
$$I_1 + I_2 = 70'375 \text{ Fr} + 1625 \text{ Fr} = 72'000 \text{ Fr}$$
$$M_1 = ? \qquad M_2 = ?$$

Dalle serie di dati ricaviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \bullet 0{,}1 \bullet \dfrac{4}{12} + y \bullet 0{,}15 \bullet \dfrac{3}{12} = 70'375 \\ x \bullet 0{,}15 \bullet \dfrac{3}{12} + y \bullet 0{,}1 \bullet \dfrac{4}{12} = 72'000 \end{cases}$$

8.2 Metodi di risoluzione di un sistema

8.2.1 Metodo di sostituzione

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 7 & \text{(I)} \\ 3x - y = 7 & \text{(II)} \end{cases}$

Risolvo la (II) rispetto alla y:

$$3x - y = 7$$
$$-y = 7 - 3x$$
$$y = 3x - 7$$

Sostituisco nell'equazione (I):

$$2x - 3y = 7$$
$$2x - 3(3x - 7) = 7$$
$$2x - 9x + 21 = 7$$
$$-7x = -14$$
$$x = 2$$

sostituisco $x = 2$ in $y = 3x - 7 = 3 \bullet 2 - 7 = -1$.

Il sistema ha soluzione: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Esercizio: risolvi con il metodo di sostituzione i sistemi

i) $\begin{cases} 3x - 4y = 18 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

v) $\begin{cases} y = 0{,}08x \\ y = 100 + 0{,}04x \end{cases}$ vi) $\begin{cases} y - 0{,}07x = 0 \\ y = 80 + 0{,}05x \end{cases}$

8.2.2 Metodo di addizione/sottrazione

Esempio 1: risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 & \text{(I)} \\ 3x + y = 2 & \text{(II)} \end{cases}$

Sommando la (I) con la (II) si eliminano le y e rimane un'equazione in x.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (I) \\ 3x + y = 2 & (II) + \end{cases}$$
$$\overline{5x \qquad = 3}$$
$$x = \frac{3}{5}$$

La soluzione x=3/5 che ottengo mi permette di trovare la y, sostituendo x=3/5 nella prima o nella seconda equazione:

$$2 \bullet \frac{3}{5} - y = 1$$
$$y = \frac{1}{5}$$

Il sistema ha quindi soluzione $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$.

Esempio 2: risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 8 & (I) \\ 2x + 5y = -1 & (II) \end{cases}$

Moltiplico la (I) per 5 e la (II) per 2. Ottengo così il sistema:

$$\begin{cases} 15x - 10y = 40 \\ \ \ 4x + 10y = -2 & + \end{cases}$$
$$\overline{19x \qquad = 38}$$
$$x = 2$$

Sommando la prima e la seconda equazione, elimino le y e mi rimane un'equazione in x. La soluzione x=2 che ottengo mi permette di trovare la y, sostituendo x=2 nella prima o nella seconda equazione. Scelgo la (I):

$$3 \bullet 2 - 2y = 8$$
$$-2y = 2$$
$$y = -1$$

Il sistema ha quindi soluzione $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Esercizio: risolvi con il metodo appena visto i sistemi seguenti.

i) $\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 2m - n = 10 \\ m - 2n = -4 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 4x + 3y = 26 \\ 3x - 11y = -7 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 9x - 3y = 24 \\ 11x + 2y = 1 \end{cases}$ vi) $\begin{cases} 7x + 12y = -1 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$ vii) $\begin{cases} 3x + 8y = 4 \\ 15x + 10y = -10 \end{cases}$ viii) $\begin{cases} 4x - 3y = 15 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

8.2.3 Il metodo del confronto

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x + y = 7 & (I) \\ 2x + 3y = 18 & (II) \end{cases}$

Risolviamo sia la (I) che la (II) rispetto a y. Otteniamo così il sistema: $\begin{cases} y = 7 - x \\ y = 6 - \dfrac{2}{3}x \end{cases}$

Uguagliandole otteniamo l'equazione in x:

$$7 - x = 6 - \frac{2}{3}x$$
$$\frac{21 - 3x}{3} = \frac{18 - 2x}{3}$$
$$-x = -3$$
$$x = 3$$

Sostituendo x=3 in y=7-x otteniamo y=4. Il sistema ha quindi soluzione $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

Risolvi con lo stesso metodo i sistemi: i) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y = \dfrac{5}{3}x - 6 \\ y = \dfrac{1}{3}x + 2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

8.2.4 La risoluzione grafica

Riprendiamo il sistema risolto con il metodo del confronto: $\begin{cases} x + y = 7 & \text{(I)} \\ 2x + 3y = 18 & \text{(II)} \end{cases}$

Risolvendo rispetto a y le due equazioni otteniamo: $\begin{cases} y = 7 - x \\ y = 6 - \dfrac{2}{3}x \end{cases}$. Possiamo identificare ogni equazione con la forma algebrica di un funzione affine. Rappresentando nel piano cartesiano le due funzioni, la soluzione del sistema è data dalle coordinate del punto d'intersezione delle due funzioni.

Rappresenta nel piano cartesiano le due funzioni, poi leggi la soluzione dal grafico.

Verifica poi le soluzioni trovate.

8.3 Alcune precisazioni teoriche

Un sistema di primo grado con due equazioni e due incognite viene rappresentato nella forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Un sistema di questo tipo può avere:

- esattamente una soluzione e si dice **determinato**;
- nessuna soluzione e si dice **impossibile**;
- infinite soluzioni: si dice **indeterminato**.

Esercizio: stabilisci se i seguenti sistemi sono determinati, indeterminati o impossibili, risolvendoli dapprima graficamente e poi algebricamente.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ -x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema con il metodo di addizione/sottrazione abbiamo utilizzato questi importanti principi di equivalenza:
un sistema può essere trasformato in un sistema equivalente (che mantiene quindi le stesse soluzioni!) se
- scambio di posto le due equazioni;
- moltiplico un’equazione per un numero diverso da zero;
- un multiplo di una delle equazioni viene sommato ad un’altra equazione del sistema.

8.4 Esercizi con problemi da risolvere mediante sistemi

1. Un fondo per le pensioni vuole investire 1 milione di franchi. Per soddisfare gli impegni correnti e futuri, deve guadagnare 90'000 Fr all'anno. Ci sono due possibilità d'investimento per il fondo: delle azioni che rendono 8% all'anno e delle obbligazioni con una rendita del 12% all'anno. Quanto deve investire il fondo per le pensioni nei due investimenti per ottenere esattamente il guadagno desiderato?
(750'000 in azioni e 250'000 nelle obbligazioni)

2. Risolvi il sistema con il metodo di sostituzione.
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -6x + 2y = 4 \end{cases}$$

3. Un pascolo per le mucche di forma rettangolare è recintato con una staccionata su tre lati, mentre il quarto lato è costituito dalla stalla. La staccionata di fronte alla stalla costa 3 Fr al metro, mentre gli altri due lati costano 4 Fr al metro. Il perimetro del pascolo è di 400 metri e il costo della recinzione è di 1'400 Fr. Quali sono le dimensioni del recinto?

4. Un recipiente cilindrico per la raccolta dell'acqua può contenere 10'000 m^3 d'acqua, e la sua parete laterale è stata costruita con 5000 m^2 d'alluminio. Quali sono le dimensioni della cisterna?

8.5 APPROFONDIMENTO: Esempi di sistemi 3 X 3

8.5. 1. Risoluzione di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite mediante il metodo di sostituzione

Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \text{(I)} \\ 2x+y-z=1 & \text{(II)} \\ x-y+2z=5 & \text{(III)} \end{cases}$$

Risolvi l'equazione (I) rispetto x e sostituisci nelle altre due equazioni:

$$\begin{cases} x=6-y-z & \text{(I)} \\ 2(6-y-z)+y-z=1 & \text{(II)} \\ 6-y-z-y+2z=5 & \text{(III)} \end{cases}$$

Semplifica le equazioni (II) e (III), risolvi la (II) rispetto la y e sostituisci la y nella (III)

$$\begin{cases} x=6-y-z \\ 12-2y-2z+y-z=1 \\ -2y+z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6-y-z \\ -y-3z=-11 \\ -2y+z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6-y-z \\ y=11-3z \\ -2(11-3z)+z=-1 & \text{(III)} \end{cases}$$

Semplifica la (III) e risolvila

$$\begin{cases} x=6-y-z \\ y=11-3z \\ -22+6z+z=-1 \qquad 7z=21 \qquad z=3 \end{cases}$$

Infine sostituisci Z=3 nella (II) per ricavare la y

$$\begin{cases} x=6-y-z \\ y=11-3\cdot 3=2 \\ z=3 \end{cases}$$

e sostituisci z=3 e y=2 nella (I) per trovare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x=6-2-3=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

8.5.2 Esercizi

1 Risolvi col metodo visto i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+2=24 \end{cases} \qquad S=\{(4;5;2)\} \qquad \begin{cases} 2x-3y+z=-4 \\ x+y-6z=9 \\ x-y+4z=5 \end{cases} \qquad S=\{(8;7;1)\}$$

$$\begin{cases} x-\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=8 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}-\frac{z}{6}=1 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=7 \end{cases} \qquad S=\{(3;6;12)\} \qquad \begin{cases} 2y-x=z+1 \\ 4z-x=2y-4z \\ 2y-3z=5y-3x \end{cases} \qquad S=\{(10;7;3)\}$$

2 Risolvi i seguenti problemi a 3 incognite

a) Determinare 3 numeri sapendo che le loro somme a due a due sono 350, 380, 330,
[200, 150, 180]

b) Una somma di 450.- Fr viene divisa tra 3 persone. Un quinto di quanto viene dato alla prima persona uguaglia un quarto di quanto viene dato alla seconda, mentre un ottavo di quanto dato alla seconda uguaglia un settimo di ciò che viene dato alla terza. Trovare le 3 parti. [180.-, 144.- 126.-]

c) L’età di una madre è uguale alla somma delle età dei suoi due figli. La differenza tra le età dei figli è di due anni e l’una è gli $\frac{11}{12}$ dell’altra. Trovare le età della madre e dei figli.
[46; 22; 24]

9. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO IN R

Nelle equazioni di secondo grado, l'incognita appare con l'esponente 2. Nella forma normale,
un'equazione di secondo grado ha la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ (c è il termine noto)

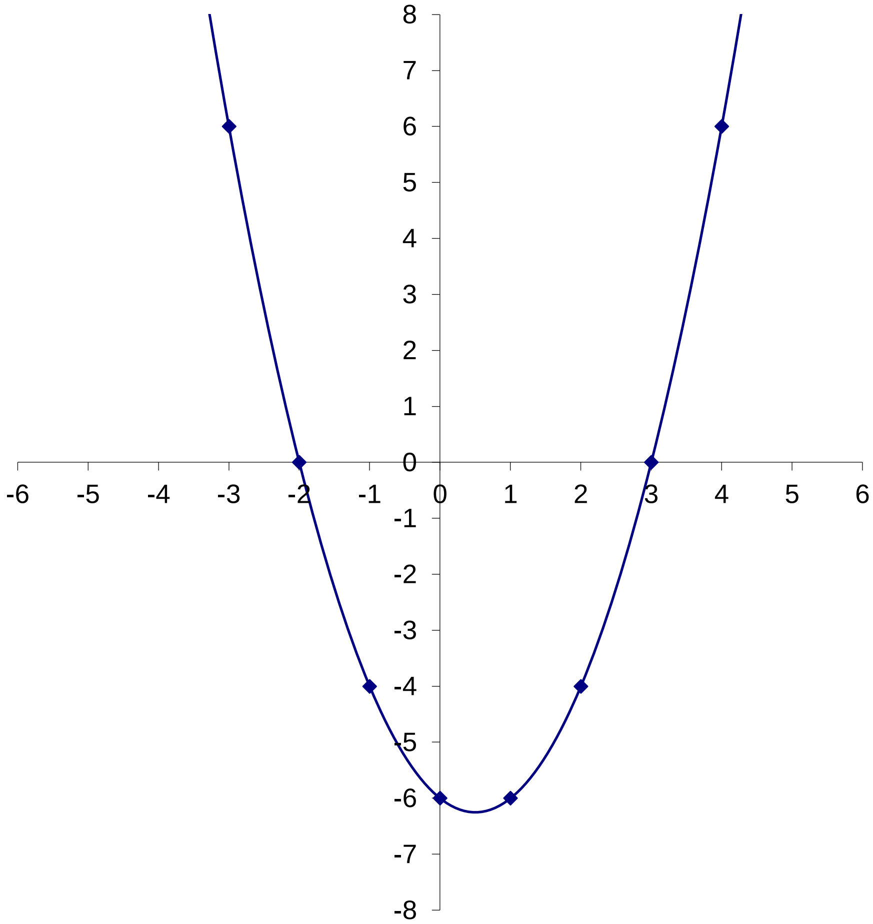
Esempi: $5x^2+3x -4 = 0$ $2x^2 = 8$

9.1 Interpretazione geometrica

Esempio.
Consideriamo l'equazione $x^2 - x - 6 = 0$. Possiamo risolverla graficamente interpretandola come uguaglianza di due funzioni.

$$\underbrace{x^2 - x - 6}_{\substack{=f(x),\\ \text{parabola}}} = \underbrace{0}_{\substack{=g(x),\\ \text{retta orizzontale}\\ \text{coincidente con l'asse } O_x}}$$

Rappresentando le due funzioni nel piano cartesiano, le soluzioni sono date dalle coordinate x dei punti d'intersezione tra le due funzioni.



Le soluzioni dell'equazione sono: ……………………….

9.2 Risoluzione di un'equazione di secondo grado mediante la scomposizione in fattori

Cercheremo di illustrare quali sono le operazioni algebriche che, facendoci passare attraverso una serie di equazioni equivalenti a quella data, ci permettono di calcolare le soluzioni e cioè, quei valori dell'incognita che verificano l'equazione.

Si utilizza questo metodo quando l'equazione data è facilmente riconoscibile come prodotto di due polinomi di primo grado.
Si potrà così risolvere l'equazione uguagliando a zero ciascun fattore e determinando poi la soluzione delle due equazioni di 1° grado così ottenute (questo procedimento è giustificato dal fatto che il prodotto di 2 numeri è nullo se almeno uno dei fattori è nullo).
Vale la seguente proprietà:

Se m e n sono due numeri reali, allora

$$m \bullet n = 0$$

Se e solo se m = 0 oppure n = 0

Esempio 1: $x^2 - 4x + 3 = 0$ (trinomio tipico)

$(x - 3)(x - 1) = 0$

Ora si uguagliano a zero i due fattori e si risolvono le due equazioni di 1° grado risultanti:

$(x - 3)(x - 1) = 0$

$(x - 3) = 0$ $\quad$ $(x - 1) = 0$

$x_1 = 3$ $\quad$ $x_2 = 1$

Soluzioni: $x_1 = 3; x_2 = 1$

Esempio 2: $3x^2 - 9x = -6$

$3x^2 - 9x + 6 = 0$

$3(x^2 - 3x + 2) = 0$ (messa in evidenza)

$3(x - 2)(x - 1) = 0$ (trinomio tipico)

$(x - 2)(x - 1) = 0$

Soluzioni: $x_1 = 2; x_2 = 1$

Esempio 3: $3x^2 = -3x$

$3x^2 + 3x = 0$

$3x(x + 1) = 0$

$x(x + 1) = 0$

Soluzioni: $x_1 = 0; x_2 = -1$

Esercizi: risolvi le seguenti equazioni.

a) $x^2 - 8x = -16$
b) $x^2 - 3x = 10$
c) $x^2 - 56 = -x$
d) $-3x^2 + 33x = 90$
e) $\left(2x^2 + 4\right) \cdot \left(x^2 - 1\right) = \left(4x^2 + 2\right) \cdot \left(x^2 - 2\right)$
f) $2x^4 + 50 = 52x^2$
g) $x^2\left(x^2 - 170\right) + 169 = 0$

Soluzioni:

1. S={-3/2; 3/2}
2. S={ 0; 4/5 }
3. S={ 2; 12 }
4. S={ 4 }
5. S={ -2; 5 }
6. S={ -8;7 }
7. S={ 5; 6 }
8. S={ -2; 0; 2 }
9. S={ -5; -1; 1; 5 }
10. S={ -13; -1; 1; 13 }

9.3 Risoluzione di un'equazione di secondo grado mediante la formula risolutiva

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \left| \bullet 4a \right.$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \qquad \left| + b^2 \right.$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

OSSERVAZIONE:

Se un'equazione è di grado n, essa ammetterà n radici fra reali, immaginarie, distinte coincidenti; per cui **un'equazione di 2° grado ammetterà 2 soluzioni**.

Soluzioni possibili di un'equazione di 2° grado	**2 soluzioni reali distinte** **2 soluzioni reali e coincidenti (una soluzione reale doppia)** **2 soluzioni immaginarie e distinte (0 soluzioni reali)**

Esempi:

2 soluzioni reali e distinte

a) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

1 soluzione reale doppia
(2 soluzioni reali e coincidenti)

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

0 soluzioni reali
in R S = $\emptyset$

c) $2x^2 + 5x + 10 = 0$

Da questi tre esempi possiamo notare che le soluzioni possibili di un'equazione di

2° grado, dipendono dall'espressione sotto il segno di radice:

$$\mathbf{b^2 - 4ac = \Delta} \qquad \textbf{Discriminante}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$ $\Delta > 0$: 2 soluzioni reali e distinte $\Delta = 0$: 1 soluzione doppia $\Delta < 0$: 0 soluzioni reali

Osservazione: se x_1 e x_2 sono soluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, allora $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

9.4 Esercizi

a) Risolvi le seguenti equazioni con la formula risolutiva.

1. $6x^2 - x = 2$ $\quad S = \left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$
2. $5x^2 + 13x = 6$ $\quad S = \left\{-3;\frac{2}{5}\right\}$
3. $x^2 + 4x + 2 = 0$ $\quad S = \left\{-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right\}$
4. $x^2 - 6x - 3 = 0$ $\quad S = \left\{3-2\sqrt{3};3+2\sqrt{3}\right\}$
5. $2x^2 - 3x - 4 = 0$ $\quad S = \left\{\frac{3-\sqrt{41}}{4};\frac{3+\sqrt{41}}{4}\right\}$
6. $3x^2 + 5x + 1 = 0$ $\quad S = \left\{\frac{-5-\sqrt{13}}{6};\frac{-5+\sqrt{13}}{6}\right\}$
7. $\frac{3}{2}x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad S = \left\{\frac{4-\sqrt{10}}{3};\frac{4+\sqrt{10}}{3}\right\}$
8. $\frac{5}{3}x^2 + 3x + 1 = 0$ $\quad S = \left\{\frac{-9-\sqrt{21}}{10};\frac{-9+\sqrt{21}}{10}\right\}$
9. $\frac{5}{x^2} - \frac{10}{x} + 2 = 0$ $\quad S = \left\{\frac{5-\sqrt{15}}{2};\frac{5+\sqrt{15}}{2}\right\}$
10. $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$ $\quad S = \left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$
11. $4x^2 + 81 = 36x$ $\quad S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$
12. $24x + 9 = -16x^2$ $\quad S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$
13. $\frac{5x}{x^2+9} = -1$ $\quad S = \{\ \}$
14. $\frac{1}{7}x^2 + 1 = \frac{4}{7}x$ $\quad S = \{\ \}$

---

b) Risolvi i seguenti problemi:

1. Sono dati due numeri positivi il secondo dei quali supera di una unità il doppio del primo. Trova i due numeri sapendo che la differenza tra il quadrato del secondo ed il quadrato del primo è 560.
   [13, 27]

2. In un trapezio rettangolo la base maggiore è gli 8/5 della minore e l'altezza supera quest'ultima di 2 cm. Sapendo che l'area misura 156 cm^2 trova la lunghezza delle basi. [10 cm, 16 cm]

3. Una macchina ed un autocarro partono contemporaneamente da una città per raggiungerne un'altra che dista dalla prima 1200 km. La velocità media della macchina supera quella dell'autocarro di 20 km/h ed il tempo impiegato dall'autocarro per percorrere la distanza è di 5 ore superiore a quello impiegato dalla macchina. Trovare le velocità dei due automezzi. [60 Km/h; 80 Km/h]

4. Per Pasqua ogni membro di una famiglia invia agli altri un biglietto augurale. Se il postino consegna 156 biglietti quanti sono in quella famiglia?

[13]

c) Ancora alcune equazioni di secondo grado.

1. $x^2+6x-2=0$ $\quad S=\left\{-3-\sqrt{11};\ -3+\sqrt{11}\right\}$

2. $2x^2-3x-4=0$ $\quad S=\left\{\dfrac{3-\sqrt{41}}{4};\ \dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right\}$

3. $x^2+8x-3=0$ $\quad S=\left\{-4-\sqrt{19};\ -4+\sqrt{19}\right\}$

4. $2x^2-3x+4=0$ $\quad S=\left\{\ \right\}$

5. $2x^2-4x-3=0$ $\quad S=\left\{\dfrac{2-\sqrt{10}}{2};\ \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$

6. $4x^2-4x+1=0$ $\quad S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

7. $3x^2-4x-13=0$ $\quad S=\left\{\dfrac{2-\sqrt{43}}{3};\ \dfrac{2+\sqrt{43}}{3}\right\}$

8. $6x^2-11x-10=0$ $\quad S=\left\{-\dfrac{2}{3};\ \dfrac{5}{2}\right\}$

9. $2x+\dfrac{3}{2}=x^2$ $\quad S=\left\{\dfrac{2-\sqrt{10}}{2};\ \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$

10. $16x^2+23x+4=0$ $\quad S=\left\{\dfrac{-23-\sqrt{273}}{32};\ \dfrac{-23+\sqrt{273}}{32}\right\}$

11. $x^2+\dfrac{1}{3}x=\dfrac{10}{3}$ $\quad S=\left\{-2;\ \dfrac{5}{3}\right\}$

12. $(5x+1)^2-2(x+2)(x+3)=6$ $\quad S=\left\{-\sqrt{\dfrac{17}{23}};\ \sqrt{\dfrac{17}{23}}\right\}$

13. $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ $\quad S=\left\{-1+\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\right\}$

14. $\sqrt{6}x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+1=0$ $\quad S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

15. $9x^2-\dfrac{12}{5}x=-\dfrac{4}{25}$ $\quad S=\left\{\dfrac{2}{15}\right\}$

16. $4x-1=5x^2$ $\quad S=\left\{\ \right\}$

17. $\dfrac{x^2-1}{x}-x+8=3[1-2(x-1)]+5x$ $\quad S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

18. $\dfrac{3x-5}{x-2}+\dfrac{x-3}{1-x}=\dfrac{x^2+17}{x^2-3x+2}$ $\quad S=\left\{-3;\ 6\right\}$

10. CALCOLO PERCENTUALE

10.1 Introduzione

La ditta PCKappa produce 37 computer al giorno. Di questi 5 sono difettosi. Un'altra ditta, la StarPC, produce 172 computer alla settimana, dei quali 22 sono difettosi.
Quale delle due ditte é più affidabile?

Per dare una risposta alla domanda precedente si possono considerare i rapporti :

$$\frac{\text{pezzi difettosi}}{\text{pezzi prodotti}}$$

	PCKappa	StarPC
rapporti	$\frac{5}{37}$	$\frac{22}{172}$
confronto delle frazioni riconducendole ad un comun denominatore	$\frac{860}{6364}$	$\frac{814}{6364}$
confronto dei valori decimali	~0,135	~ 0,128
confronto delle percentuali	13,5%	12,8%

10.2 Problemi con le percentuali

La percentuale 30% sta ad indicare la frazione $\frac{30}{100}$. Usare le percentuali é quindi analogo ad usare delle frazioni.

$$30\% \text{ di } 1200 = 360$$

percentuale, $\frac{30}{100}$	**intero**, a cui é riferita la percentuale	**parte** dell'intero, che corrisponde al 30%

Tre esempi di problemi con le percentuali

1. Il signor Bianchi compera un televisore in formato 16:9, optando per un pagamento rateale. Il prezzo di listino é di 3425 Fr. Assieme alla prima rata deve pagare un acconto corrispondente al 10% del prezzo di listino. A quanti Fr ammonta l'acconto?

Soluzione:

Metodo 1:

Dati

Percentuale Intero Parte	

L'acconto corrisponde a ………. Fr.

Metodo 2: (con la proporzionalità diretta)

Prezzo listino	Acconto

Proporzione:

2. Un negozio di computer pratica uno sconto per gli studenti del 13,5 % sui suoi prodotti. Marco ottiene uno sconto pari a 337,50 Fr per l'acquisto del suo calcolatore, della stampante e del modem. A quanto ammontava la spesa senza lo sconto per studenti?

Metodo 1:

Dati

Percentuale Intero Parte	

Senza lo sconto per studenti avrebbe speso ………... Fr.

Metodo 2: (con la proporzionalità diretta)

Spesa	Sconto

Proporzione:

3. L'abbonamento annuale alla rivista "A" costa 135 Fr, mentre quello ad una rivista "B" costa 215 Fr. Durante la campagna pubblicitaria per il rinnovo degli abbonamenti, l'abbonamento alle due riviste viene offerto ad un prezzo complessivo di 287 Fr.
A quanto ammonta lo sconto in percentuale approfittando dell'offerta d'abbonamento combinato?

Metodo 1:

Dati

Percentuale Intero Parte	

Lo sconto ottenuto corrisponde al……….

Metodo 2: (con la proporzionalità diretta)

Costo totale	sconti

Proporzione:

10.3 Esercizi sul calcolo percentuale

1. FAX NEWS: "Hanno finto di perdere 200 portafogli in 20 diverse località dell'Europa, ne sono stati restituiti 116, il 58 per cento. L'esperimento condotto dalla rivista Reader' s Digest ha visto più onesti i cittadini di Oslo (Norvegia) e di Odense (Danimarca). All'ultimo posto quelli di Losanna".
   Questo trafiletto tratto da una rivista italiana é corretto dal punto di vista matematico?

2. Calcola:
   i) 2 ¾ % di 650 Km =
   ii) x % di 900 mL = 117 mL => x =
   iii) 3,5 % di x = 14 cm^3 => x =

3. Confronta due riviste: “Tuttabellezza” ed “Elegantissima”. La prima è di 120 pagine tra cui 54 di pubblicità; la seconda è formata da 160 pagine di cui ben 74 pubblicitarie. Quale rivista contiene più informazioni e meno pubblicità?

4. Nelle ultime votazioni in un paese del Ticino si sono recati alle urne 2324 elettori pari al 41 ½ %. Quanti sono gli aventi diritto di voto?

5. Un negozio di elettrodomestici propone la vendita di uno stereo Hi-Fi al prezzo di 2'760 Fr. Sapendo che il commerciante prevede un guadagno del 43 ¾ % sul costo, determina il prezzo di costo.

6. Compero un’automobile e dopo un ribasso del 10% cioè di 2500.- Fr ottengo uno sconto del 2% per pagamento a contanti.
   A) Calcolare il prezzo lordo ed il prezzo netto dell’auto.
   B) Calcolare la percentuale di riduzione totale.

7. Hai acquistato un rampichino a 2'852.- Fr, dopo che il prezzo è stato scontato dell’8%. Qual era il prezzo di listino?

8. Su 1300 abitanti adulti di un comune ticinese, l’anno scorso 585 hanno eseguito degli esami del sangue. Se ci si attende la stessa percentuale in un comune del Canton Grigioni di 927 abitanti adulti, quanti saranno in tale paese i prelievi?

9. Una partita di caffè ha una massa lorda di 768 Kg; la tara è del 2 ½ %. Durante la tostatura vi è una perdita di massa del 37%. Quanti Kg di caffè tostato si ottengono?

10. Un negozio propone sconti del 25% sui jeans (prezzo di listino 103.- Fr). Il suo concorrente vende lo stesso articolo a 77.- Fr. Dove è più conveniente comprare i pantaloni ?

Soluzioni:
1. Sì
2. i)17,975 Km; ii) 13%; iii) 400 cm^3
3. 45% 46 ¼ %
4. 5600
5. 1'920 Fr
6. A) 25'000 Fr, 22'050 Fr; B) 11,8%
7. 3’100 Fr
8. ≅ 417
9. 471.744 Kg
10. Nel negozio concorrente, perché nel primo i jeans costano 77.25 Fr

11. FUNZIONI

11.1 Problemi introduttivi

1) Una ditta che produce dolciumi ha dei costi fissi al giorno di 300 Fr e dei costi variabili di 1,75 Fr per dozzina di dolciumi prodotti.
A) Se x rappresenta le dozzine di dolciumi prodotte, esprimi i costi c(x) come funzione di x.
B) Considerando che in un giorno possono essere prodotte al massimo 200 dozzine dolciumi, rappresenta la funzione c(x).
C) Se ogni dozzina è rivenduta a 3,25 Fr, determina la funzione r(x) che descrive i ricavi in funzione di x. Rappresentala poi sullo stesso piano cartesiano. Quante dozzine deve vendere la ditta per uguagliare i costi ai ricavi?

2) I costi fissi giornalieri per una ditta che produce sci ammontano a 3'200 Fr e quelli variabili ammontano a 68 Fr per paia di sci.
A) Se x rappresenta il numero di paia di sci prodotti, esprimi il costo al giorno c(x) in funzione di x.
B) Se in un giorno possono essere prodotti al massimo 150 paia di sci, rappresenta la funzione c(x).
C) Se un paio di sci viene venduto a 100 Fr al paio, determina la funzione che descrive il ricavo r(x); rappresenta poi la funzione sullo stesso piano cartesiano.
D) Se tu fossi il boss della ditta, quali indicazioni potresti trarre dalla lettura del grafico?

3) Un editore che pubblica un settimanale ha per ogni edizione dei costi fissi pari a 30'000 Fr e dei costi variabili di 1,20 Fr per ogni copia stampata.
Il prezzo di vendita è fissato a 4,20 Fr per copia.
Ogni edizione può essere stampata al massimo in 20'000 copie.
a) Determina la funzione che descrive i costi in funzione del numero di copie stampate.
b) Determina la funzione che descrive il ricavo in funzione del numero di copie vendute.
c) Rappresenta le due funzioni nel piano cartesiano.
Indica in modo chiaro sul grafico la risposta alla seguente domanda: quante copie deve vendere il giornale per uguagliare il ricavo ai costi?
Verifica algebricamente la risposta al punto d.
Ricava graficamente e calcola qual è il guadagno massimo che può essere realizzato con un’edizione stampata in 20'000 copie.

4) Costruisci (e risolvi) un problema simile ai precedenti, riferito ad una ditta che produce pacchetti di fazzoletti di carta.

11.2 Definizione

Siano P ed A due insiemi.
Una **funzione** da P verso A è una relazione che ad ogni elemento x appartenente a P fa corrispondere *al massimo* un elemento y appartenente ad A.
P è l'insieme di partenza, A quello di arrivo.

Esempio:
Siano P = { 1; 2; 3; 4; 5 } ed A = { 10; 15; 20; 25; 30; 35 }.
Per definire una funzione occorre precisare per ogni elemento dell'insieme di partenza cosa corrisponde nell'insieme di arrivo, ad esempio:

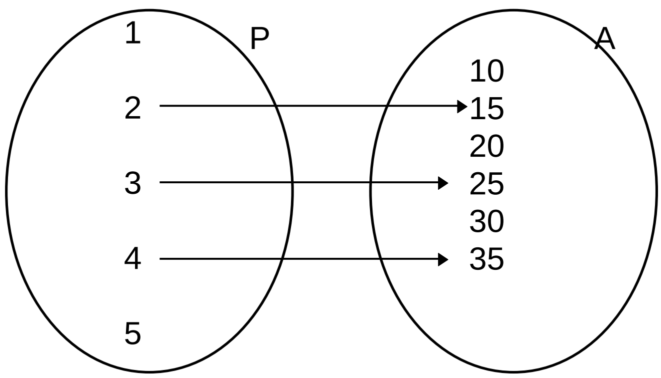
f(1) non esiste;
f(2) = 15; (si dice che 15 è l'**immagine** di 2 rispetto alla funzione f)
f(3) = 25;
f(4) = 35;
f(5) non esiste.

Più semplicemente: per ogni $x \in P$ la sua immagine è $f(x) = 10x - 5$.
In simboli, si definisce una funzione come segue:
$f\colon P \to A,\ x \mapsto y = 10x - 5$

Altre precisazioni:
$\mathbf{D_f}$ = {2; 3; 4} è **l'insieme di definizione** della funzione f . I suoi elementi sono tutti quegli elementi dell'insieme di partenza che hanno un'immagine.
2; 3 e 4 sono detti **argomenti** della funzione f.
D_f è un sottoinsieme di P.
$\mathbf{Im_f}$ = {15; 25; 35} è **l'insieme delle immagini**, cioè di tutti quegli elementi che sono i corrispondenti di elementi dell'insieme di partenza.
Im_f è sempre un sottoinsieme di A.

Come si può rappresentare una funzione?

- Con un diagramma a frecce.



- Con il grafo della funzione $G_f = \{ (x, y) \in P \times A \ / \ y = f(x) \}$
  $G_f = \{(2; 15), (3; 25), (4; 35) \}$

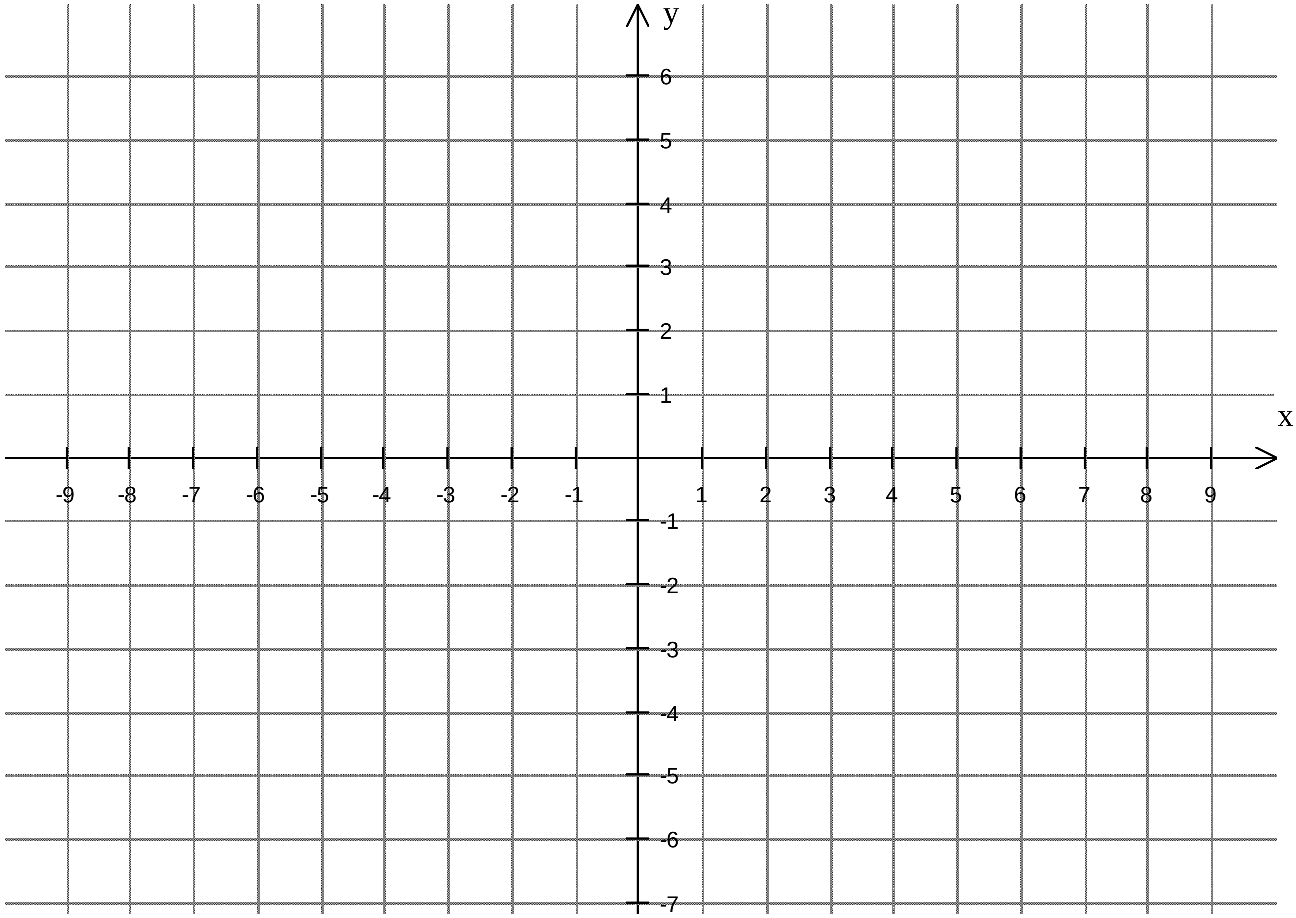
- Con il diagramma cartesiano.
  Rappresentiamo su uno stesso piano cartesiano le seguenti funzioni reali:

  $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{2}x$

  $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = 2x + 4$

  $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = -3x - 2$

  $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = -\frac{3}{2}x - 3$

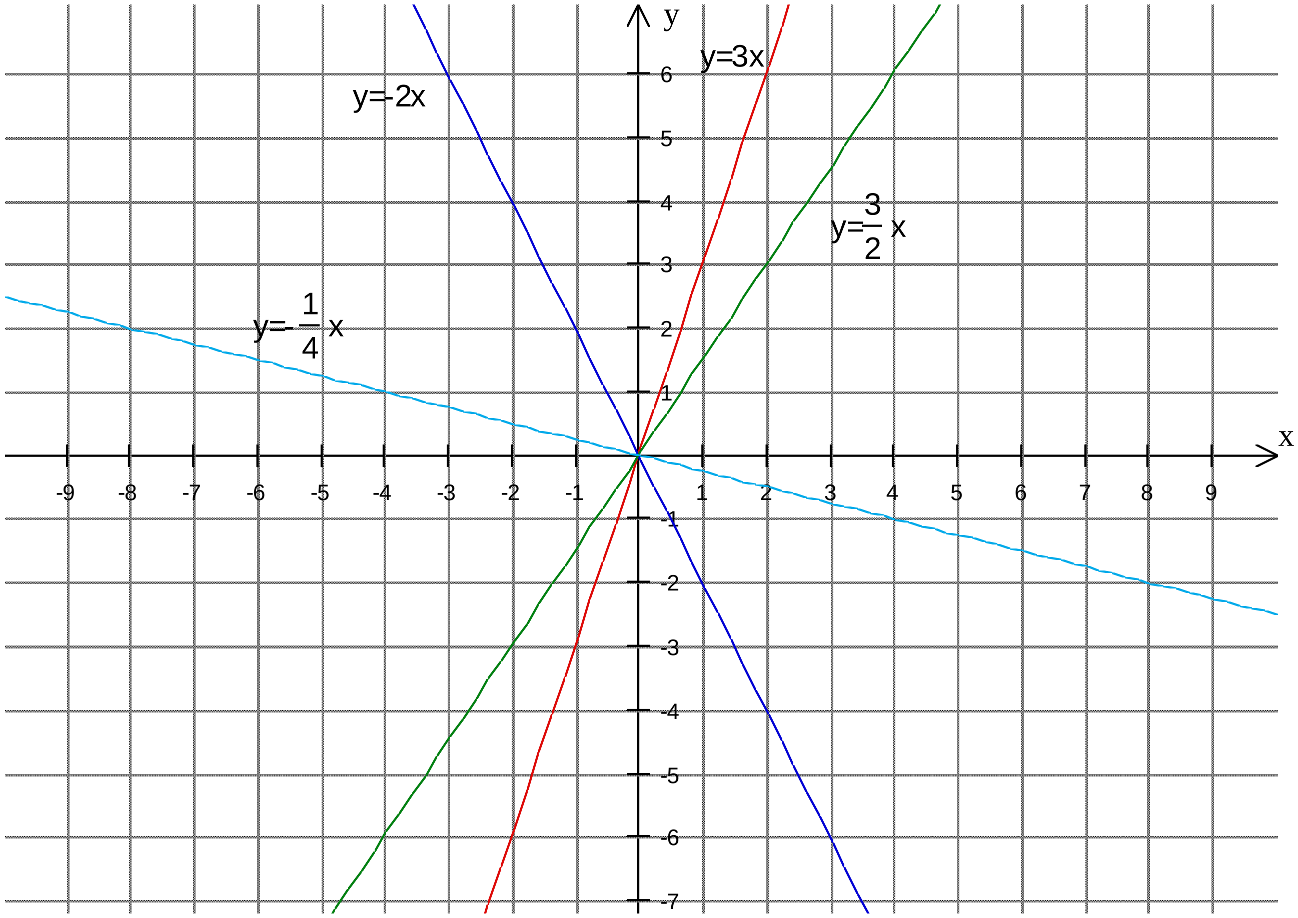


11.3 La funzione lineare

La funzione lineare è una funzione del tipo

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = a \cdot x \ \text{ con } a \in \mathbb{R}$.

Nel seguente piano cartesiano sono rappresentate alcune funzioni lineari.



Osservazioni:

i) Il grafico della funzione lineare è una retta che passa per il punto (0; 0).
L'immagine di 0 è: $f(0) = a \cdot 0 = 0$

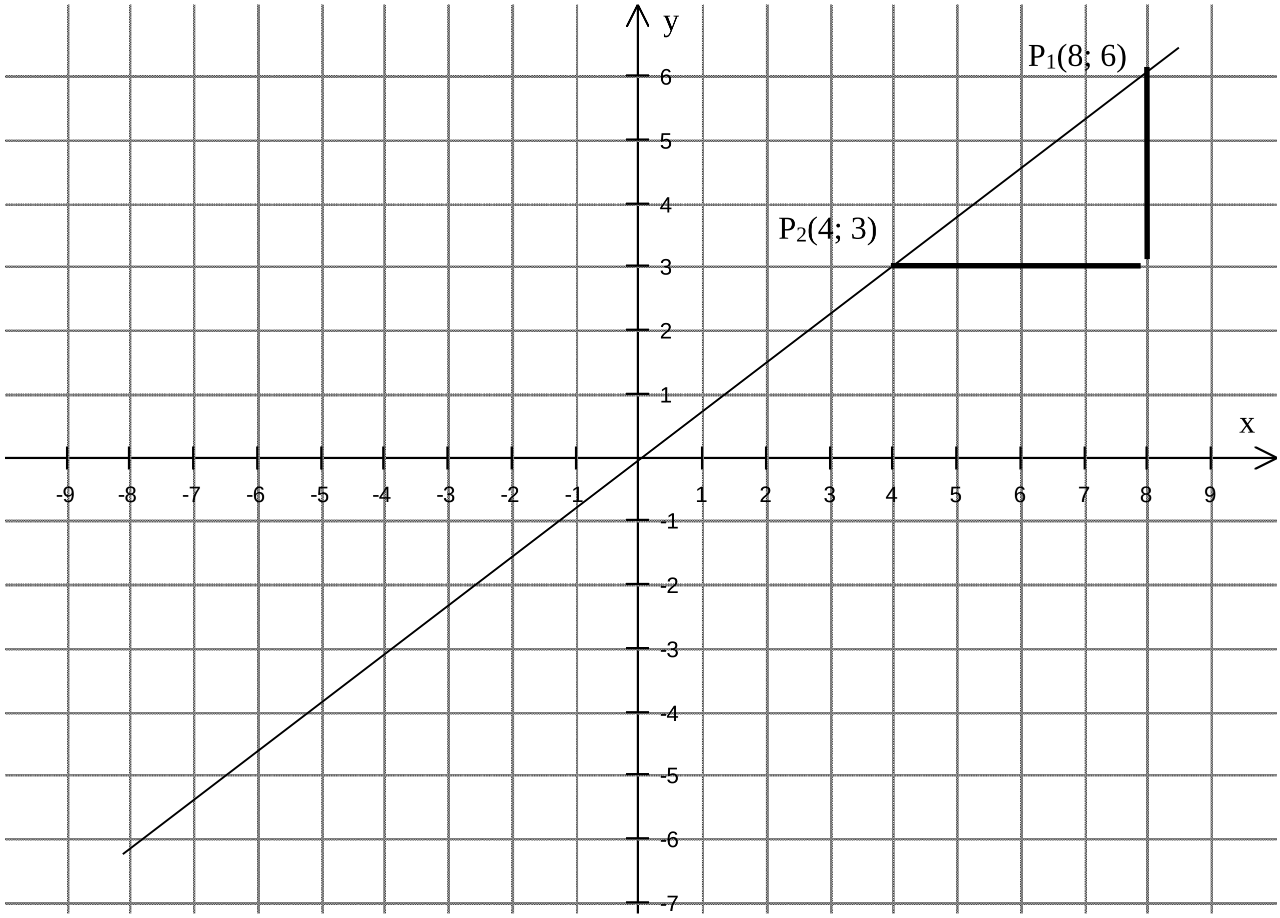
ii) Se $a > 0$ il grafico della funzione passa per il I° e il III° quadrante.

iii) Se $a < 0$ il grafico della funzione passa per il II° e il IV° quadrante.

iv) a indica la pendenza della retta.

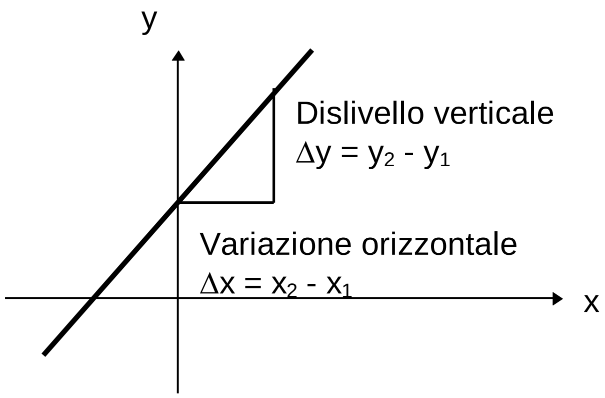
v) $D_f = \mathbb{R}$ e $Im_f = \mathbb{R}$

La pendenza di una retta nel piano cartesiano.



La pendenza è il rapporto:

Generalizzando, definiamo la pendenza per una qualsiasi retta nel piano cartesiano:



La pendenza è definita con il rapporto:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esercizi:

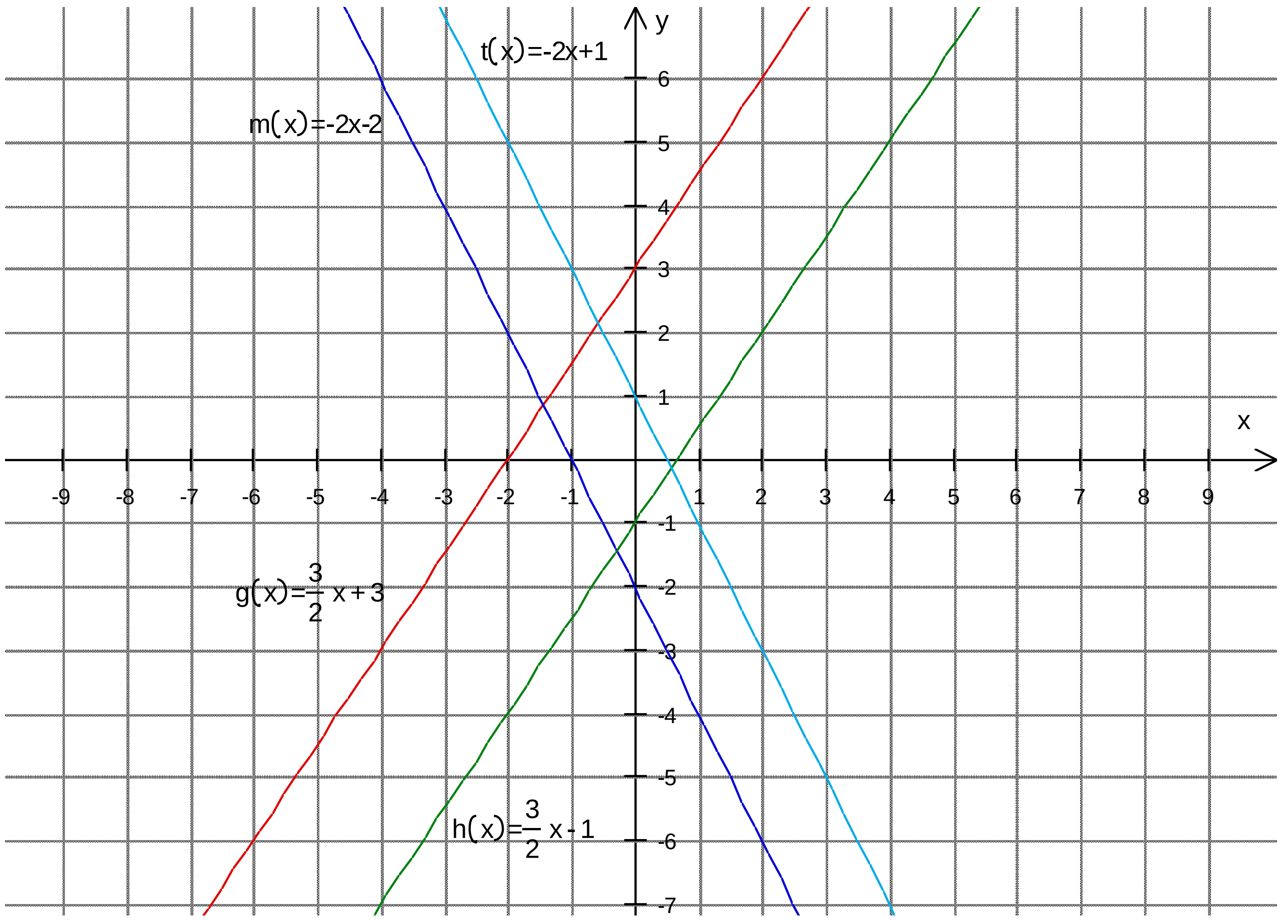
1) In ognuno dei seguenti casi disegna un piano cartesiano, traccia la retta passante per i punti indicati, poi determina la pendenza della retta.
   i) (-3; -4), (3; 2) ii) (-2; 3), (1; -3) iii) (-4; 2), (3; 2) iv) (2; 4), (2; -3)
2) Rappresenta le seguenti funzioni lineari su di un piano cartesiano, determinando poi la forma algebrica della funzione.
   i) f passa per P(5; 4) ii) g passa per S(2; 5)
   ii) k passa per M(-2; 4) iv) m passa per T(-4; 3)
3) Disegna il grafico delle seguenti funzioni lineari, senza la tabellina!
   i) $f(x) = \frac{4}{3}x$ $g(x) = 5x$ $t(x) = -\frac{3}{4}x$
   ii) $p(x) = -2x$ $f(x) = -\frac{2}{3}x$

11.4 La funzione affine

Una funzione affine è una funzione del tipo:

$f\colon\ R \to R,\ x \mapsto y = ax + b$

Nel piano cartesiano che segue, sono rappresentate alcune funzioni affini.



Osservazioni:

i) il grafico di una funzione affine è una retta che passa per il punto (0, b); b è l'immagine di 0, infatti f(0) = a.0 + b = b.
ii) a indica la pendenza della retta. I grafici delle funzioni g e h sono due rette parallele, perché hanno stessa pendenza a = 3/2. Questo vale anche per I grafici di m e t: la pendenza corrisponde a -2.
iii) Se a = 0 la funzione diventa $f: R \to R,\ x \mapsto y = b$. Il suo grafico è una retta parallela all'asse delle x e che passa per il punto (0, b).

Esercizi.

1) Determina il punto d'intersezione tra i grafici delle seguenti coppie di funzioni, sia graficamente che algebricamente.
   i) $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$
   ii) $f(x) = \frac{3}{5}x - 1$ e $g(x) = \frac{3}{5}x + 4$
   iii) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$ e $g(x) = x - 4$
2) Determina la forma algebrica delle seguenti funzioni, sapendo che passano per i punti:
   i) f: A(-1; -1) B(2; 5)
   ii) g: A(6; 0) B(3; -1)
   iii) k: A(1; 5/2) B(4; 7)

L'esercizio va risolto in due modi : graficamente, leggendo i valori di a e di b dal grafico e algebricamente, risolvendo un sistema.

Problemi:

1) Un'agenzia per il noleggio di automobili fa pagare 25 centesimi al chilometro se i chilometri percorsi non sono più di 100. Se il chilometraggio totale supera i 100 km, l'agenzia fattura 25 centesimi per i primi 100 km e 15 centesimi per quelli successivi. Se x rappresenta i chilometri percorsi durante il noleggio, esprimi il costo del noleggio c(x) come funzione di x. Trova c(50) e c(150), poi disegna il grafico della funzione c.

2) Scelta fra offerte di fornitura.
   Per una lavorazione esterna l'azienda Patsy può scegliere le seguenti offerte dei fornitori:
   1) azienda Alasy: 15 centesimi al pezzo più un costo fisso di 600 Fr;
   2) azienda Betsy: 25 centesimi al pezzo più un costo fisso di 300 Fr;
   3) azienda Copsy: 55 centesimi al pezzo.
   a) Determina le funzioni che descrivono i costi delle tre offerte.
   b) Rappresenta le tre funzioni sullo stesso piano cartesiano (fino a 4'000 pezzi).
   c) Determina l'offerta più conveniente al variare delle quantità di pezzi da sottoporre a lavorazione.

11.5 Forma implicita dell'equazione di una retta

Equazione della funzione affine:

$$y = ax+b.$$

Essa "esplicita" l'immagine y in funzione dell'argomento x.
E' più comoda per disegnare il grafico, perché si legge subito la pendenza e l'ordinata all'origine.

Equazione implicita (o cartesiana) di una retta:

$$Ax + By + C = 0.$$

Questa equazione non dà direttamente il valore di y in funzione della x .
Conviene trasformarla, se possibile, nella forma esplicita.

Come passare dall'equazione implicita a quella esplicita (se $B \neq 0$)

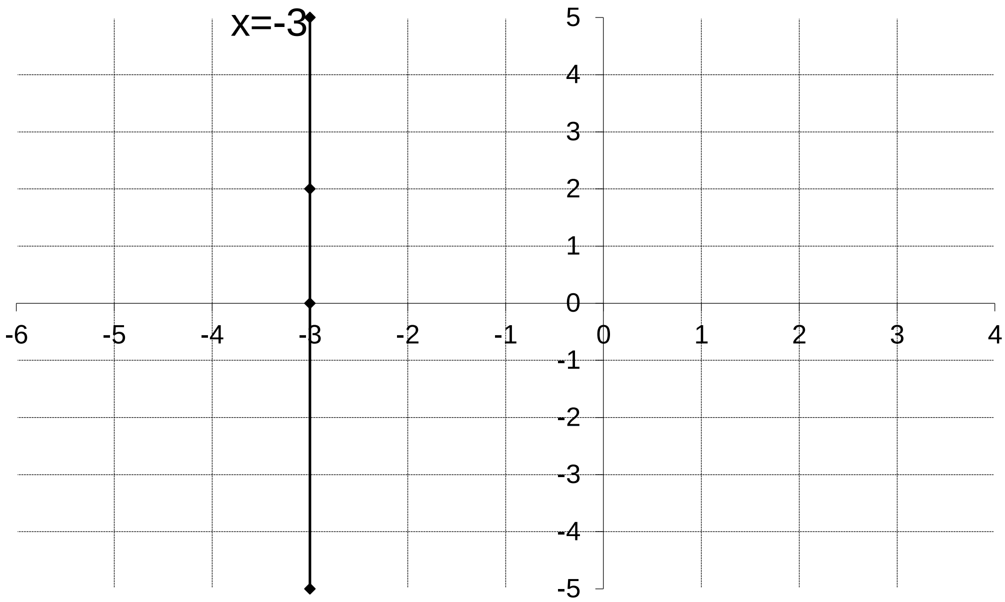
$$2x + 3y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -2x + 6 \quad /\cdot \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$$

(a =…… b =………)

Oss: le rette di equazione x = k (cioè le rette parallele all'asse delle y) possono essere scritte in forma esplicita ? Perché?…………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..

Dunque la scrittura implicita comprende tutte le rette, sia quelle che sono grafico di una funzione affine, sia quelle parallele all'asse O_y .

Esempio:



Esercizio:

i) Trasforma le seguenti equazioni implicite nell'equazione esplicita (quando possibile):

$f: 2x+y+1=0$ $\quad g: 2y-3=0$ $\quad h: x-y=0$

$m: x+3=0$ $\quad n: 6x-3y+9=0$ $\quad p: 2x+5y+5=0$

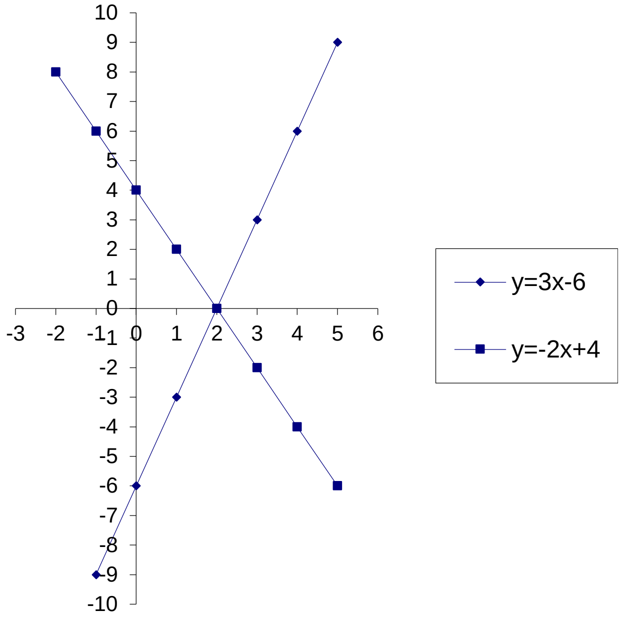
$q: 4x+4y-8=0$ $\quad r: 2x-4=0$

ii) Rappresenta le rette del punto i)

11.6 Intersezioni fra due rette e fra una retta e gli assi

Esempio:

Determina il punto di intersezione tra due rette f e g di equazioni
f: y = 3x - 6 g: y = -2x + 4.



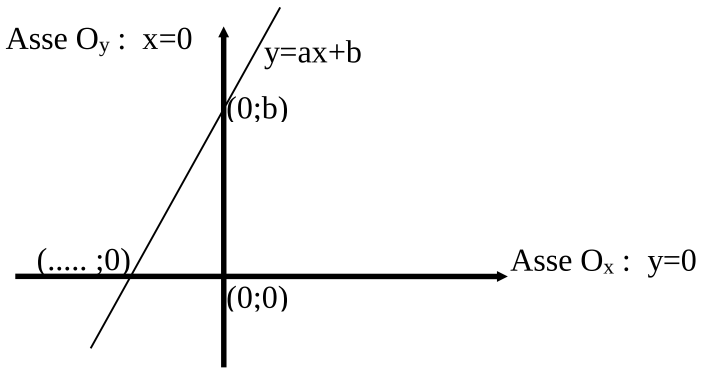
Si risolve il sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Esempio:

....
....
....
....
....
....

La soluzione del sistema dà le coordinate del punto $f \cap g = \{(2\ ;\ 0)\}$.

Determinare i punti di intersezione della retta f: $x \mapsto y = ax + b$ con l'asse delle x (O_x) e l'asse delle y (O_y).



Poiché gli assi sono delle rette si procede esattamente come nel caso precedente:

$$f \cap O_x : \begin{cases} y = ax + b \\ y = 0 \end{cases}$$

$$0 = ax + b$$

$$- ax = b$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Il sistema ha soluzione $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a} \\ y = 0 \end{cases}$

dunque $f \cap O_x = \left\{ \left(-\frac{b}{a};\ 0 \right) \right\}$.

$$f \cap O_y : \begin{cases} y = ax + b \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y = a \bullet 0 + b$$

$$y = b.$$

Il sistema ha soluzione $\begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}$

dunque $f \cap O_y = \{(0;\ b)\}$.

<u>Esempio:</u> Data la funzione f: y = 3x– 6, calcoliamo le coordinate dei punti di intersezione con gli assi:

$$f \cap O_x : \begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$0 = 3x - 6$$

$$- 3x = -6$$

$$x = 2.$$

Il sistema ha soluzione $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

dunque $f \cap O_x = \{(2; 0)\}$.

$$f \cap O_y : \begin{cases} y = 3x - 6 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y = 3 \bullet 0 - 6$$

$$y = -6.$$

Il sistema ha soluzione $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$

dunque $f \cap O_y = \{(0; -6)\}$.

<u>Esercizio</u>: Date le funzioni

$h:\ y = -2x + 1$	$k:\ y = 3x - 4$
$h:\ x + 2y - 3 = 0$	$k:\ x + y = 0$
$h:\ y = 2$	$k: x - 3y + 18 = 0$
$h:\ y = \frac{5}{4}x - 1$	$k:\ y = -\frac{4}{5}x$
$h:\ x - 4y + 8 = 0$	$k:\ x - 4y - 3 = 0$

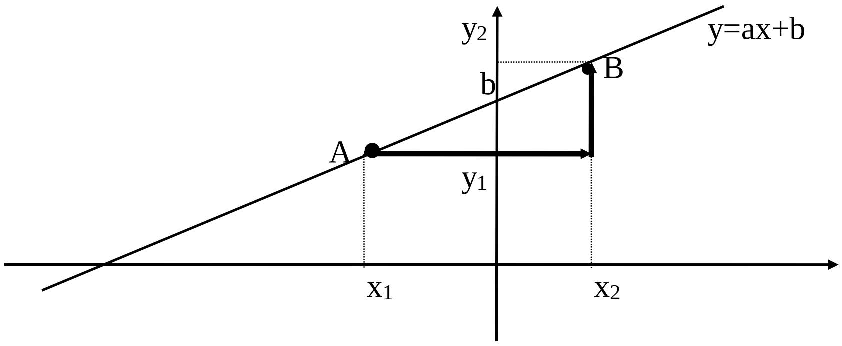
i) determina algebricamente $h \cap O_x$, $h \cap O_y$; [(1/2;0), (3;0), ∅, (4/5;0), (-8;0); (0;1), (0;3/2), (0;2), (0, -1), (0;2)];

ii) determina algebricamente $k \cap O_x$, $k \cap O_y$; [(4/3;0), (0;0), (-18;0); (0;0), (3;0); (0;-4), (0;0), (0;6), (0;0), (0;-3/4)];

iii) determina algebricamente $h \cap k$ riga per riga . [(1;-1), (-3;3), (-12;2), (20/41;-16/41); ∅];

11.7 Retta passante per due punti

Determinare l'equazione della retta che passa per due punti dati A(x_1 ; y_1) e B(x_2;y_2).



Si traccia nel piano cartesiano la retta passante per i punti dati e si determina la pendenza a e l'ordinata all'origine b.
Poiché la retta passa per A, l'equazione deve essere verificata per le coordinate di A:

$$y_1 = a\,x_1 + b\ ;$$

l'equazione deve essere verificata anche per le coordinate di B:

$$y_2 = a\,x_2 + b\ .$$

Dunque deve essere verificato il sistema di due equazioni in due incognite (a, b) :

$$\begin{cases} y_1 = a\,x_1 + b \\ y_2 = a\,x_2 + b \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 = a\,x_2 + b - a\,x_1 - b$$

$$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

<u>Esempio:</u>

Determina l'equazione della retta che passa per i due punti A(-3 ; 5/2) e B(2 ; 5).

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = a \bullet (-3) + b \\ 5 = a \bullet 2 + b \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{2} = -3a + b \\ 5 = 2a + b \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad a = \frac{5 - \frac{5}{2}}{2 - (-3)}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 5 = 2\frac{1}{2} + b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases}$$

La retta ha equazione $y = \frac{1}{2}x + 4.$

Oppure:

- prima si trova a=1/2 mediante la formula sopra e si ottiene l'equazione $y = \frac{1}{2}x + b$;
- poi si sostituiscono nell'equazione le coordinate di uno dei 2 punti: ad es. $5 = \frac{1}{2}2 + b$ e si risolve rispetto b.

<u>Esercizio</u>:

Dati i punti

A(0; -2) e B(2; 0)

A(-3; -3/2) e B(-6; -1/2)

A(0,7 ;1) e B(1,2 ; 1,7)

A(3; 4/5) e B(3; -4/5)

A(1/2 ; 3/2) e B(1; 3/2)

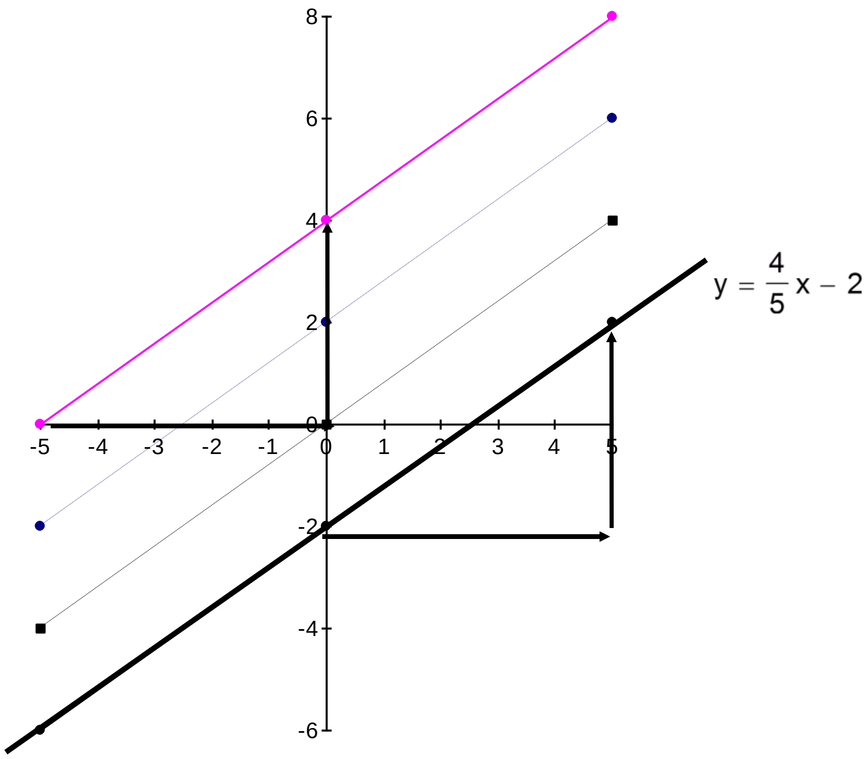
determina l'equazione della retta passante per A e B.

$$\left[y = x - 2; \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{2}; \quad y = \frac{7}{5}x + \frac{1}{50}; \quad x = 3; \quad y = 3/2 \right]$$

11.8 Rette parallele

<u>Esempio:</u> Determinare le equazioni delle rette parallele alla retta f: $y = \frac{4}{5}x - 2$.

Si tracciano nel piano cartesiano le rette parallele e si osserva la loro pendenza: le pendenze sono tutte uguali (a 4/5) !



Una retta y = a x + b (distinta da f) è parallela ad f se non ha punti di intersezione con f, dunque se il sistema $\begin{cases} y = ax + b \\ y = \frac{4}{5}x - 2 \end{cases}$ è impossibile

$\Leftrightarrow$ l'equazione $\left(a - \frac{4}{5}\right) \cdot x = -b - 2$ è impossibile $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5} \\ b \neq -2 \end{cases}$

Le rette parallele a f hanno equazione $y = \frac{4}{5}x + b$.

Teorema:

date due rette $f: \ y = a_1 x + b_1$ e	$g: \ y = a_2 x + b_2$
f e g sono parallele distinte	$\Leftrightarrow a_1 = a_2$ e $b_1 \neq b_2$
f e g sono parallele coincidenti	$\Leftrightarrow a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$

Esercizio: date le rette

f: $y = -2x + 1$ g: $y = 3x - 4$ h: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

k: $y = -x$ l: $y = 2$ m: $y = \frac{3}{2}x - 1$

i) determina le equazioni delle rette parallele alle rette date e passanti per (0; 0);

[$y = -2x$ $y = 3x$ $y = -\frac{1}{2}x$

$y = -x$ $y = 0$ $y = \frac{3}{2}x$]

ii) determina le equazioni delle rette parallele alle rette date e passanti per (1; -2);

[$y = -2x$ $y = 3x - 5$ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$y = -x - 1$ $y = -2$ $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$]

iii) determina le equazioni delle rette parallele alle rette date e passanti per (3; 2).

[$y = -2x + 8$ $y = 3x - 7$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

$y = -x + 5$ $y = 2$ $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$]

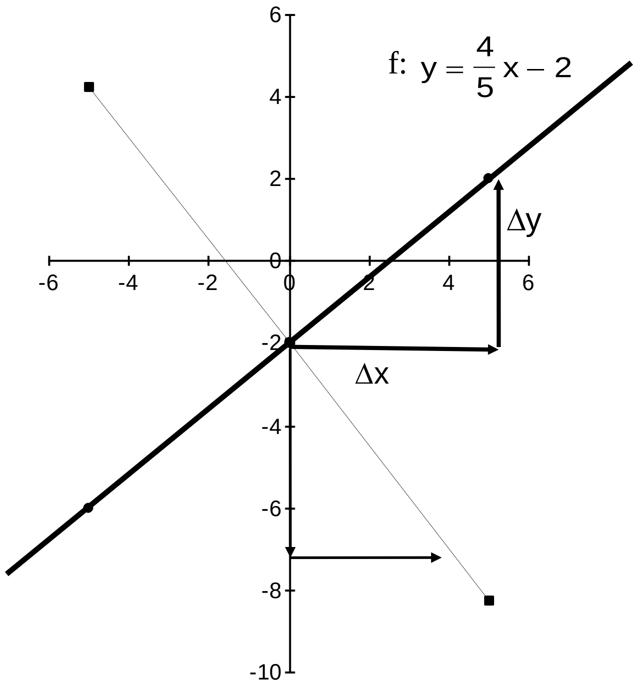
Esempio di risoluzione:

i) la retta parallela alla g ha pendenza a=3, dunque $g_{//}$: y =3x+b;
sostituisco le coordinate di (0; 0) al posto di x e di y , allora 0 = 3·0 + b ⇒ b=0 ;
l'equazione è $g_{//}$: y = 3x.

iii) la retta parallela alla f ha pendenza a =-2, dunque $f_{//}$: y =-2x+b;
sostituisco le coordinate di (3; 2) al posto di x (3) e di y (2) , allora 2 = -2·3 + b ;
infine si risolve.

11.9 Rette perpendicolari

Esempio: Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta f: $y = \frac{4}{5}x - 2$ e passante per (0;-2).



Si traccia nel piano cartesiano la retta perpendicolare alla retta data f e si osserva la pendenza .
Dunque la retta g perpendicolare a f e passante per (0;-2) ha equazione

$$g:\ y = -\frac{5}{4}x - 2$$

Teorema:

date due rette f: $y = a_1x + b_1$ e g: $y = a_2x + b_2$ (con $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$)

f e g sono perpendicolari $\Leftrightarrow$ $a_1 = -\frac{1}{a_2}$ oppure $a_1 \bullet a_2 = -1$

Dunque la retta cercata g: y=ax+b ha parametri a e b che soddisfano alle due condizioni
$\begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ -2 = -\frac{5}{4} \bullet 0 + b \end{cases}$; si risolve il sistema: $\begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ b = -2 \end{cases}$; g ha equazione $y = -\frac{5}{4}x - 2$.

<u>Esercizio</u>: date le rette

$f : y = -2x \qquad g: y = 3x - 4 \qquad h : y = -\frac{1}{2}x$

$k: y = -x \qquad l : y = 2 \qquad m : y = \frac{3}{2}x - 1$

i) determina le equazioni delle rette perpendicolari alle rette date e passanti per (0;-3);

[$y = \frac{1}{2}x - 3 \qquad y = -\frac{1}{3}x - 3 \qquad y = 2x - 3$

$y = x - 3 \qquad x = 0 \qquad y = -\frac{2}{3}x - 3$]

ii) determina le equazioni delle rette perpendicolari alle rette date e passanti per (3; 2);

[$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \qquad y = -\frac{1}{3}x + 3 \qquad y = 2x - 4$

$y = x - 1 \qquad x = 3 \qquad y = -\frac{2}{3}x + 4$]

iii) determina le equazioni delle rette perpendicolari alle rette date e passanti per (-2;1).

[$y = \frac{1}{2}x + 2 \qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \qquad y = 2x + 5$

$y = x + 3 \qquad x = -2 \qquad y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$]

<u>Esempio di risoluzione:</u>

i) la retta perpendicolare alla g ha pendenza a = -1/3 , dunque $g_\perp$: $y = -\frac{1}{3}x + b$;

sostituisco le coordinate di (0; -3) al posto di x (0) e di y(-3), allora $-3 = -\frac{1}{3}\cdot 0 + b \Rightarrow$

$b=-3$; l'equazione è $g_{//}$: $y = -\frac{1}{3}x - 3$.

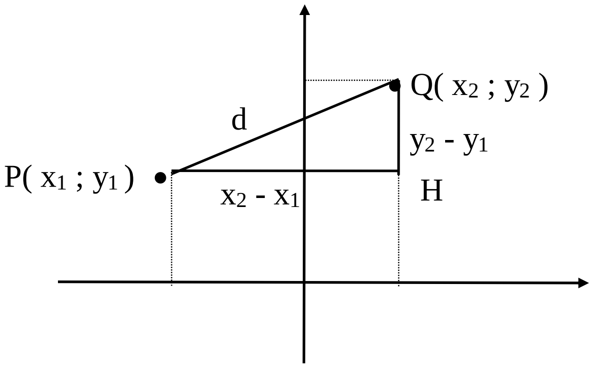
ii) la retta parallela alla f ha pendenza $a = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$, dunque $f_{//}$: $y = \frac{1}{2}x + b$;

sostituisco le coordinate di (3; 2) al posto di x (3) e di y (2) , allora $2 = \frac{1}{2}\cdot 3 + b$;

infine si risolve.

11.10 Distanza tra due punti

Determina la distanza tra due punti P(x_1 ; y_1) e Q(x_2 ; y_2) nel piano cartesiano.



Si traccia il segmento PQ; la distanza tra P e Q è la lunghezza $\overline{PQ}$ del segmento.

Per il teorema di Pitagora $\overline{PQ}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

<u>Esercizio</u>: dati i punti

A(3; 2) B(-1; 0) C(1; -2) D(1/2 ; 5/2) E(6;-2)

i) determina la distanza del punto A dal punto B, di A da C, di A da D, di D da B;
$[2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; \sqrt{26}/2; \sqrt{34}/2]$

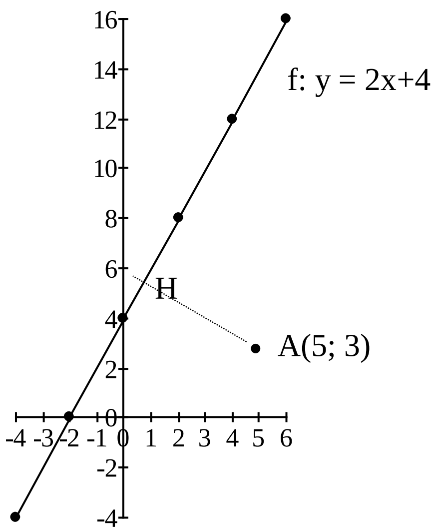
ii) determina la lunghezza dei segmenti BC e CD; $[2\sqrt{2}; \sqrt{82}/2]$

iii) determina il perimetro del triangolo ABE. $[2\sqrt{5} + \sqrt{53} + 5]$

11.11 Distanza di un punto da una retta

<u>Esempio:</u>

Determina la distanza del punto A(5; 3) dalla retta f: y = 2x + 4.



- si traccia la perpendicolare g ad f passante per il punto A:

  si determina l'equazione della retta $g \perp f$: y = 2x + 4 e passante per A:

  $y=-\frac{1}{2}x+b$ tale che $3=-\frac{1}{2}5+b$ cioè $b=\frac{11}{2}$ $\Rightarrow$ g: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$;

- si trova il punto di intersezione H tra la retta f e la sua perpendicolare g ;

  si determinano le coordinate di $H = g \cap f$:

  $$\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2} \end{cases} \quad 2x+4=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2} \quad \frac{5}{2}x=\frac{3}{2} \quad x=\frac{3}{5}$$

  $$\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{26}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{5}\ ;\ \frac{26}{5}\right)$$

- la distanza tra A e la retta f è la distanza tra A e H, cioè la lunghezza del segmento AH.

  si determina la distanza $\overline{AH}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}-5\right)^2+\left(\frac{26}{5}-3\right)^2}=\sqrt{\frac{484}{25}+\frac{121}{25}}=\sqrt{\frac{605}{25}}\cong 4{,}919$

<u>Esercizio</u>:

Dati i punti A(3; 2) B(-1; 0) C(1; -2)

e le rette f: y = x – 3 g: y = 2x - 4 h: $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

i) determina la distanza del punto A dalla retta f, di B da g, di C da h; $\left[\sqrt{2};\frac{6\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{13}}{13}\right]$

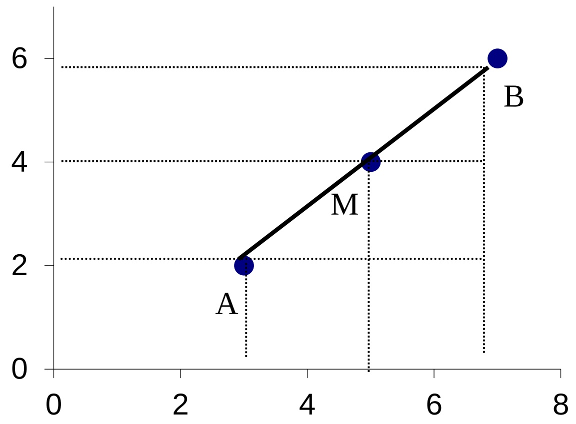
ii) determina l'area del triangolo ABC (esercizio di ricapitolazione). [6]

11.12 Il punto medio di un segmento di estremi AB

Definizione: Dati due punti A e B , il punto medio M del segmento AB è il punto del segmento equidistante da A e B (cioè che divide a metà tale segmento).

Dati i punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, allora il punto medio del segmento AB è $M(x_M; y_M)$ con

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad , \qquad \boxed{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}} \; .$$



Esempio: Il punto medio del segmento A(3; 2) B(7; 6) è M(5; 4).

Esercizi:

1) Determina graficamente e con le formule il punto medio del segmento PQ e QR con P(3;0), Q(7;0) e R(3;-5). [(5; 0), (5; -5/2)]

2) Determina il punto medio dei segmenti AB con A e B:
   a) A(0; -2) e B(2; 0) [(1; -1)]
   b) A(3; 4/5) e B(3; -4/5) [3; 0)]
   c) A(1/2 ; 3/2) e B(1; -1/2) [(3/4; ½)]
   d) A(-7 ;1) e B(1 ; -3) . [(-3; -1)]

3) Dati i punti A(3; 2) B(-1; 0) C(1; -2)
   a) determina l'equazione delle mediane[*] del triangolo ABC;
   b) determina la lunghezza delle mediane del triangolo ABC; $\left|3\sqrt{2}; 3; 3\right|$
   c) determina l'equazione degli assi[**] dei segmenti AB, BC e AC.

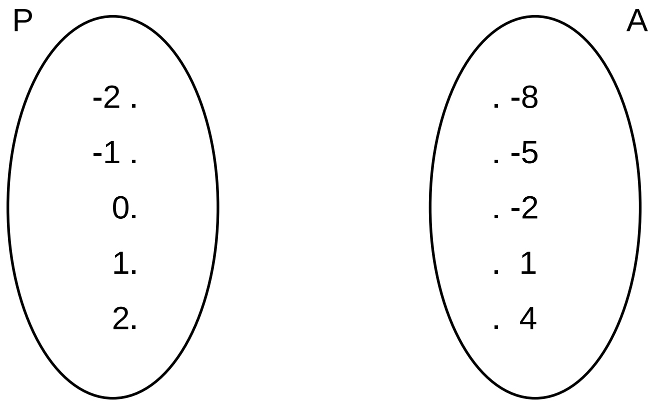
[**] L'asse di un segmento AB è la retta perpendicolare ad AB e passante per il punto medio di AB.

[*] Le mediane di un triangolo sono i segmenti che collegano ogni vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

11.13 La funzione inversa

11.13.1 Definizione

Consideriamo la funzione $f.\ P \to A,\ x \mapsto y = 3x - 2$.



Chiameremo **funzione inversa di f** la funzione f^{-1}, da A verso P, che fa corrispondere alle immagini della funzione f ($y \in Im_f$), i rispettivi argomenti ($x \in D_f$).

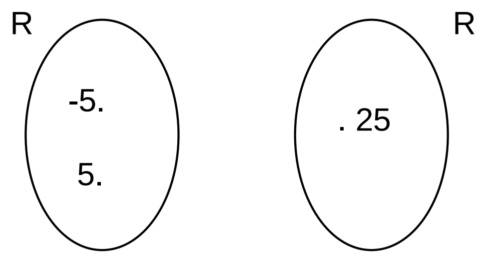
In simboli: $f\colon\ P \to A,\ x \mapsto y = f(x)$

$f^{-1}\colon\ A \to P,\ y \mapsto x = f^{-1}(y)$

Osservazione: $D_{f^{-1}} = Im_f$ e $Im_{f^{-1}} = D_f$

Problema: *esiste sempre* f^{-1}*?*

Consideriamo ad esempio la funzione $f\colon\ R \to R,\ x \mapsto y = x^2$



Proviamo a definire la funzione inversa come sopra. Osserviamo che al 25 dobbiamo far corrispondere 2 elementi: l’inversa di f non è più una funzione. (Conflitto con la definizione di funzione: “ ... ad ogni elemento dell’insieme di partenza può corrispondere al massimo un elemento dell’insieme di arrivo”.)

Quindi, quando due elementi diversi dell’insieme di definizione (-5 e 5) hanno la stessa immagine (25), non esiste la funzione inversa.

Affinché esista la sua inversa, una funzione deve avere questa caratteristica:

ad elementi diversi dell’insieme di definizione, devono corrispondere immagini diverse.

Una funzione con questa caratteristica è detta **funzione iniettiva**.

Riassumendo: è possibile definire l’inversa di una funzione soltanto se f è iniettiva.

Esercizio: disegna il grafico di una funzione non iniettiva. Come si può riconoscere dal grafico se una funzione è iniettiva?

11.13.2 La forma algebrica della funzione inversa

Vogliamo determinare la forma algebrica della funzione inversa di

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{2}x + 3$$

Affinché esista l'inversa, f deve essere iniettiva.
Ragioniamo sulla definizione di iniettività:

una funzione è iniettiva se ad argomenti diversi corrispondono immagini diverse, cioè se $a \neq b$, allora $f(a) \neq f(b)$ per tutte le a,b $\in D_f$.

Da questa definizione possiamo dedurre che se due immagini f(a) e f(b) sono uguali, allora devono essere immagine dello stesso elemento dell'insieme di definizione, in simboli:
se f(a) = f(b), allora deve seguire che a = b per tutte le a, b $\in D_f$.

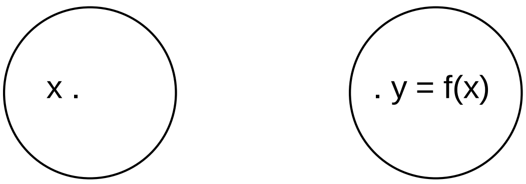
Verifichiamo se f è iniettiva seguendo quest'ultimo ragionamento.

$$f(a) = f(b)$$
$$\frac{1}{2}a + 3 = \frac{1}{2}b + 3$$
$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$$
$$a = b$$

Possiamo concludere che f è iniettiva (perché ?) e che quindi esiste f^{-1}.

Esercizio: verifica se tutte le funzioni affini sono invertibili.

Come determinare la forma algebrica di f^{-1}?



$$f(x) = y$$
$$\frac{1}{2}x + 3 = y \qquad \text{risolviamo rispetto a x}$$
$$\frac{1}{2}x = y - 3$$
$$x = 2(y - 3)$$
$$x = \underbrace{2y - 6}_{f^{-1}(y)}$$

Sostituiamo x con y e otteniamo: $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = 2x - 6$.

Esercizio: determina, se esiste, la forma algebrica delle seguenti funzioni.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = 5x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{3 + 2x}{x}$

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ $\qquad$ $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}$

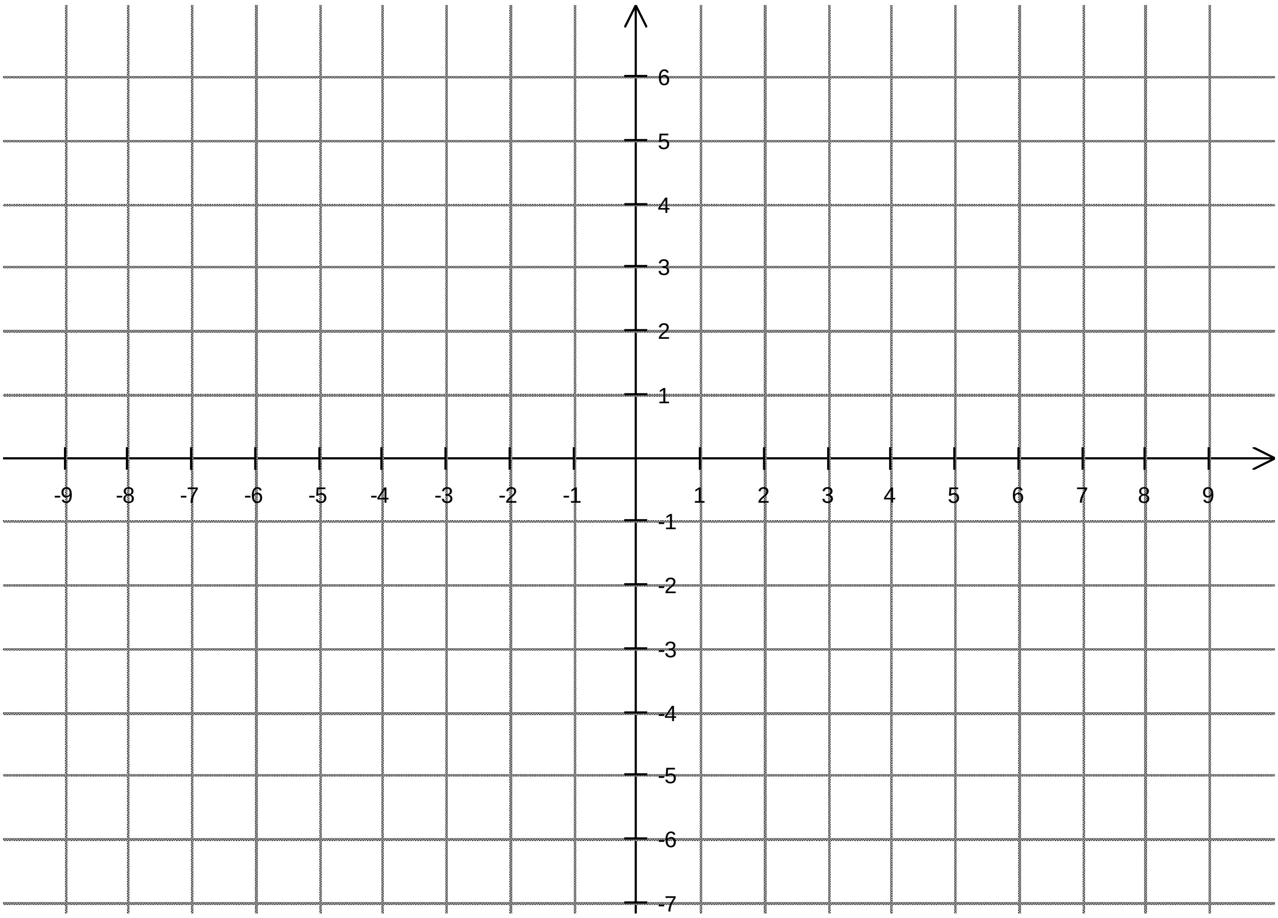
$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = 2x^2 - \frac{2}{3}$ $\qquad$ $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{5 + 3x}{2}$

11.13.3 Il grafico della funzione inversa

Consideriamo la funzione reale $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{2}{3}x + 2$.

f è una funzione affine, quindi è iniettiva ed esiste la sua inversa. Trova la sua forma algebrica.

Rappresenta le due funzioni nel piano cartesiano:



Traccia la bisettrice del I° e del III° quadrante, la retta di equazione y = x.
Cosa puoi osservare sui grafici di f e della sua inversa?

....

....

....

I punti (-3; ...); (0; ...); (3; ...); (6; ...); ... appartengono al grafico della funzione f, mentre (...; -3); (...; 0); (...; 3); (...; 6); ... appartengono al grafico di f^{-1}.

In generale: ....

11.14 Le funzioni del tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Consideriamo ad esempio la funzione $f\colon\ R \to R,\ x \mapsto y = \frac{2x-3}{x-4}$.

Prima di rappresentarla è utile determinare il suo insieme delle immagini e il suo insieme di definizione.

Troviamo D_f.

La domanda che ci possiamo porre è se esistono dei valori di x (scelti nell'insieme di partenza), per i quali non è possibile calcolare l'immagine.

Nel nostro caso dobbiamo escludere quel valore di x che fa diventare nullo il denominatore: ....

Per x= ...... non esiste l'immagine e deve quindi essere escluso dall'insieme di definizione: ....

Troviamo Im_f.

Sappiamo che $Im_f = D_{f^{-1}}$. Prima di trovare la forma algebrica dell'inversa, dobbiamo verificare se esista, in altre parole se ad argomenti diversi corrispondono immagini diverse.

Verifichiamo se f sia iniettiva.

....

....

....

....

....

....

....

Conclusione: ....

Determiniamo la forma algebrica dell'inversa.

....

....

....

....

....

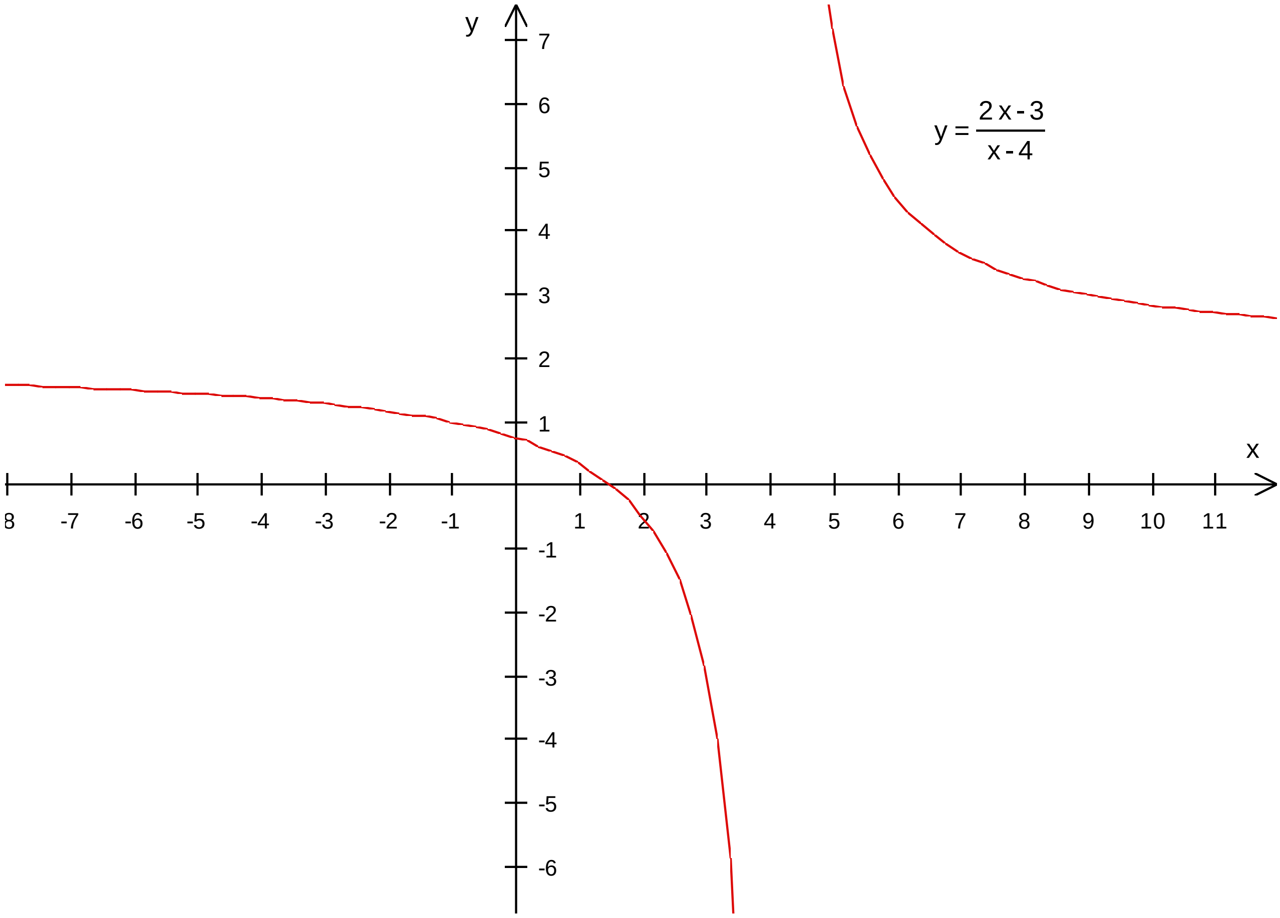
....

....

Ora possiamo determinare $D_{f^{-1}}$.

$D_{f^{-1}}$ = ...

Im_f = ...



Osservazioni:

- il grafico di questa funzione è formato da due rami e prende il nome di iperbole;
- la retta di equazione x=4 prende il nome di asintoto verticale;
- la retta di equazione y=2 prende il nome di asintoto orizzontale;
- per x=4 non esiste l'immagine; avvicinandoci verso il 4 da sinistra il valore della funzione tende a $-\infty$, mentre se ci avviciniamo al 4 da destra il valore della funzione tende a $+\infty$;
- per x tendente a $+\infty$, f(x) tende a 2, come pure per x tendente a $-\infty$, f(x) tende a 2.

Esercizio: per le seguenti funzioni, determina

- l'insieme di definizione;
- l'insieme delle immagini;
- gli asintoti;
- rappresentale nel piano cartesiano;
- rappresenta il grafico dell'inversa, ricordandoti che è simmetrico rispetto all'asse y = x.

$k\colon R \to R,\ x \mapsto y = \frac{5}{x}$ $\qquad$ $f\colon R \to R,\ x \mapsto y = \frac{2x-4}{x+1};$ $\qquad$ $g\colon R \to R,\ x \mapsto y = \frac{6-3x}{x-1}$

11.15 Le funzioni del tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, dove a, b, c sono numeri reali

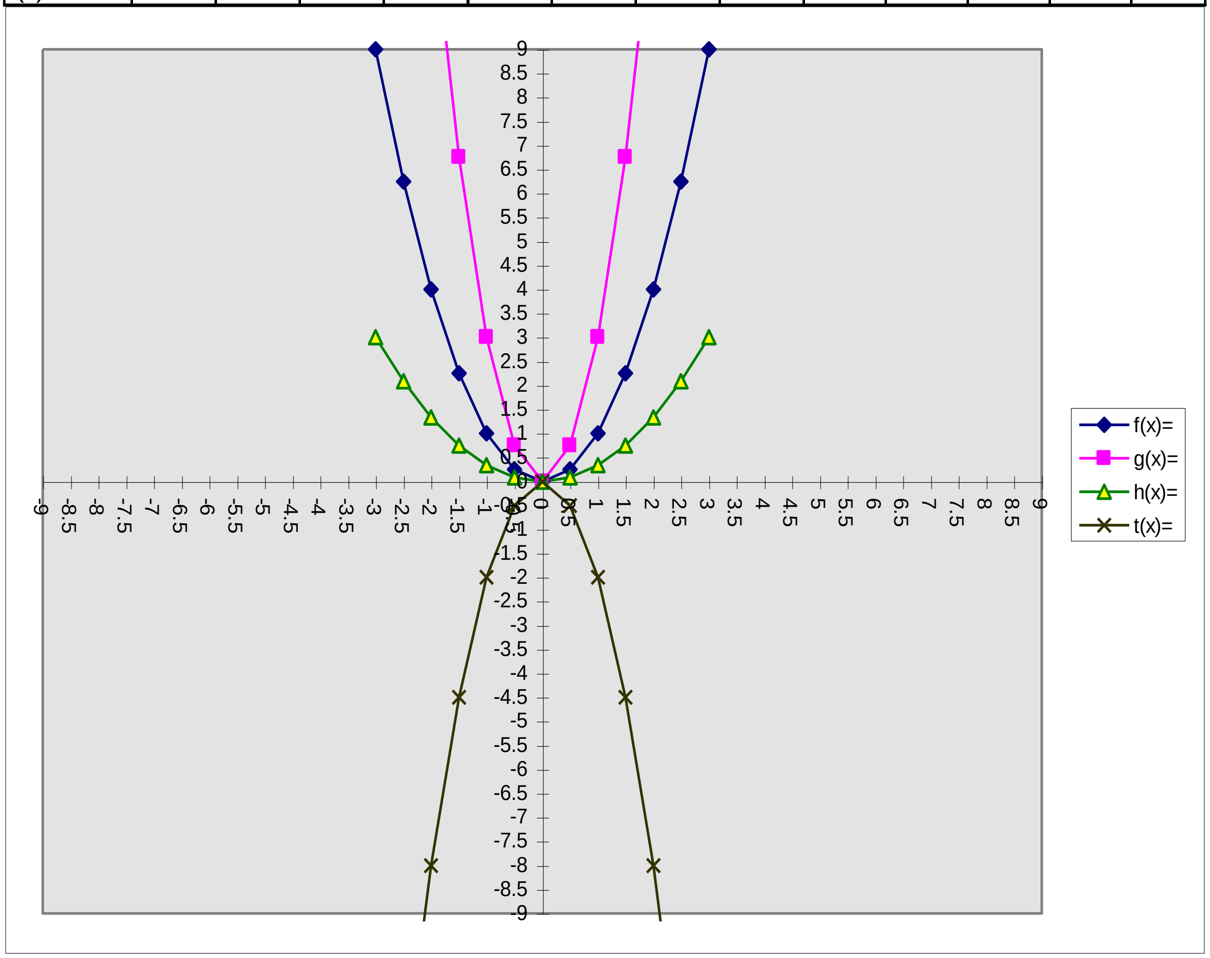
Consideriamo alcuni casi particolari, in cui ad esempio i valori di b o di c possono essere uguali a zero. Ciò ci permetterà di dare un significato ai valori di a, b e c.
Nei seguenti esempi, se non verrà specificato, si sottintende che l'insieme di partenza e quello di arrivo siano l'insieme dei numeri reali R.

11.15.1 La funzione $y = ax^2$, (b = 0 e c = 0).

Rappresentiamo nel piano cartesiano le seguenti funzioni:

$f(x) = x^2$; $g(x) = 3x$; $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ e $t(x) = -2x^2$

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
f(x)=	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9
g(x)=	27	18.75	12	6.75	3	0.75	0	0.75	3	6.75	12	18.75	27
h(x)=	3	2.083	1.333	0.75	0.333	0.083	0	0.083	0.333	0.75	1.333	2.083	3
t(x)=	-18	-12.5	-8	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	-8	-12.5	-18



Il grafico di una funzione di secondo grado si chiama parabola; nel nostro caso particolare $y = ax^2$, è anche simmetrico rispetto all'asse delle y.
Determina l'insieme di definizione e quello delle immagini per le funzioni f, g, h e t.
....
....

Osservando il grafico delle funzioni considerate nell'esempio, quali relazioni vedi tra il valore di a e i grafici delle funzioni?

....

....

....

....

Consideriamo la funzione $f\colon R \to R,\ x \mapsto y = x^2$. Dal grafico osserviamo che non è iniettiva perché ad esempio il -2 e il 2 hanno la stessa immagine 4. Quindi non esiste la sua inversa.

Se però delimitiamo l'insieme di definizione ai numeri reali positivi ($D_f = R^+$), la funzione diventa iniettiva. La sua inversa sarà:

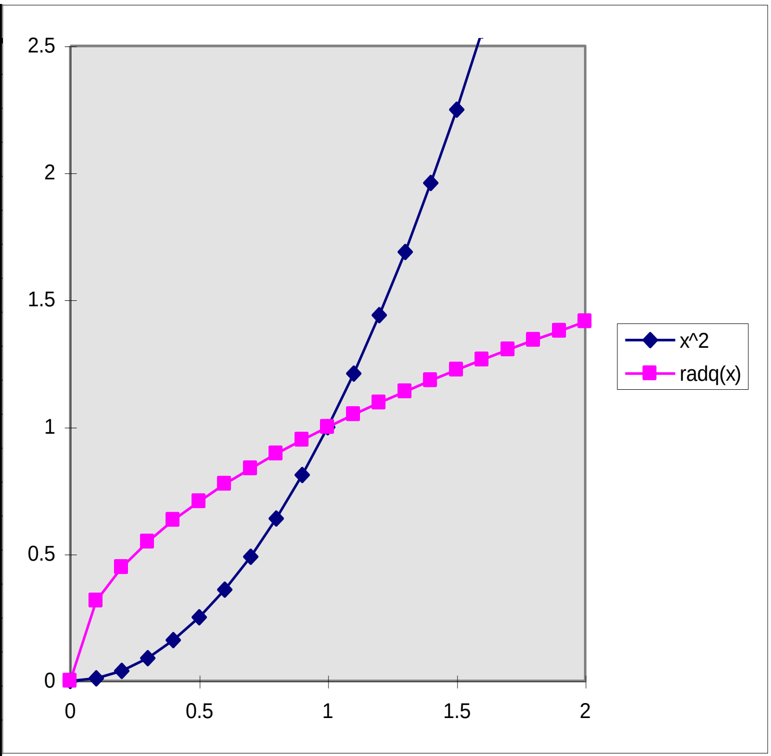
....

....

....

Rappresentiamo f e la sua inversa, osservando in particolare il comportamento delle due funzioni nell'intervallo tra 0 e 2.

x	x^2	radq(x)
0	0	0
0.1	0.01	0.31623
0.2	0.04	0.44721
0.3	0.09	0.54772
0.4	0.16	0.63246
0.5	0.25	0.70711
0.6	0.36	0.7746
0.7	0.49	0.83666
0.8	0.64	0.89443
0.9	0.81	0.94868
1	1	1
1.1	1.21	1.04881
1.2	1.44	1.09545
1.3	1.69	1.14018
1.4	1.96	1.18322
1.5	2.25	1.22474
1.6	2.56	1.26491
1.7	2.89	1.30384
1.8	3.24	1.34164
1.9	3.61	1.3784
2	4	1.41421

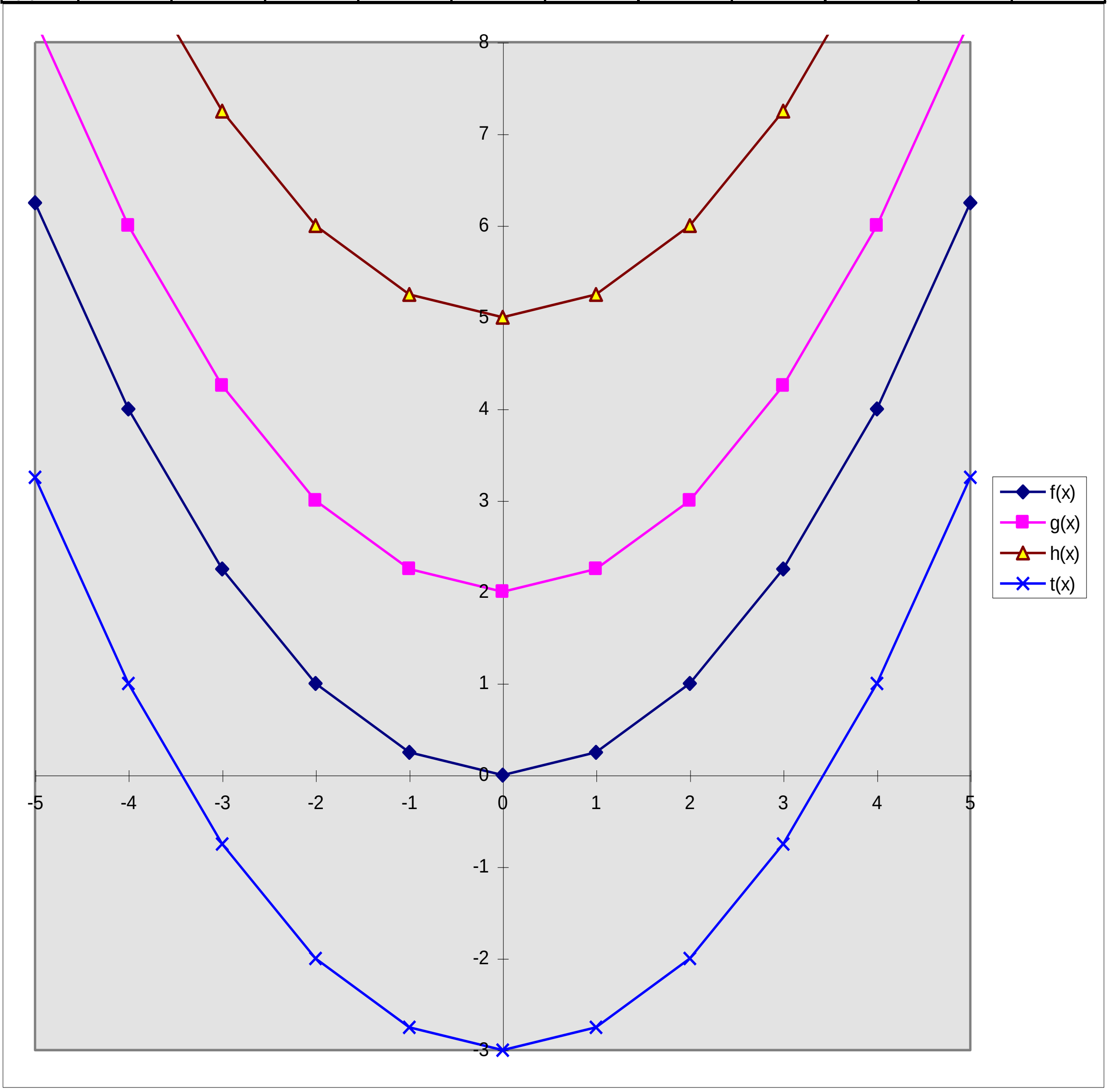


11.15.2 La funzione $y = ax^2 + c$, (b =0).

Rappresentiamo nel piano cartesiano le funzioni

$f(x) = \frac{1}{4}x^2;\ g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2;\ h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 5;\ t(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25
g(x)	8.25	6	4.25	3	2.25	2	2.25	3	4.25	6	8.25
h(x)	11.25	9	7.25	6	5.25	5	5.25	6	7.25	9	11.25
t(x)	3.25	1	-0.75	-2	-2.75	-3	-2.75	-2	-0.75	1	3.25



I grafici di g, h e t sembrano essere ottenuti mediante traslazione del grafico di f lungo una direzione parallela all’asse Oy. Il valore di c sta ad indicare se la traslazione è verso l’alto o verso il basso e di quante unità.

Determina l’insieme di definizione e quello delle immagini delle quattro funzioni.

....

....

....

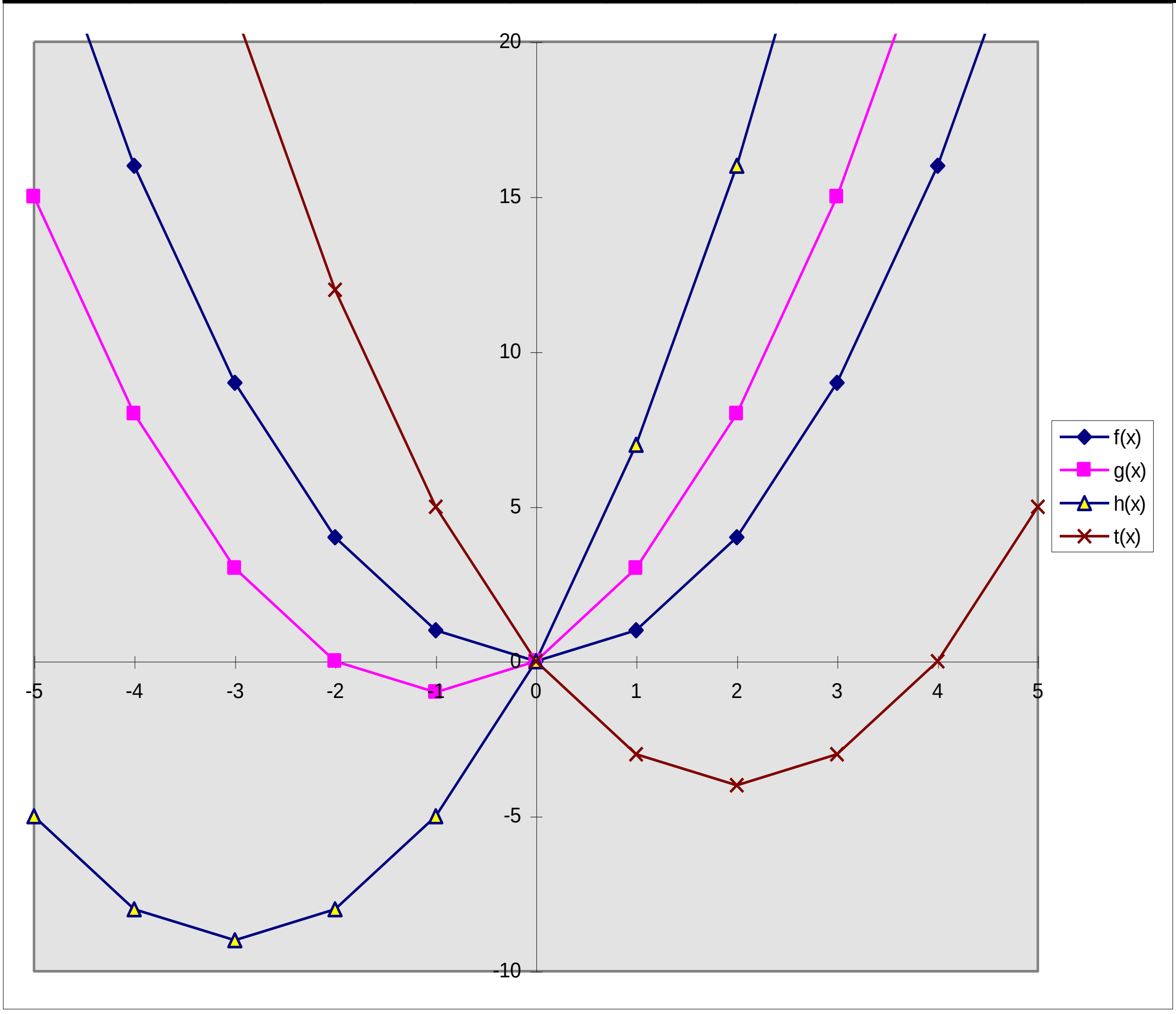
Considera ad esempio la funzione h. Dal grafico si deduce che non è iniettiva (perché?) e che quindi la sua inversa non esiste.
Come si potrebbe fare per renderla iniettiva?
....
Determina ora la forma algebrica dell'inversa di h.
....
....
....
Quello visto sopra non è l'unico modo per far diventare iniettiva la funzione: si potrebbe ad esempio delimitare l'insieme di definizione ai numeri reali negativi. Così facendo la forma algebrica dell'inversa diventerebbe:
....
....

11.15.3 La funzione $y = ax^2 + bx$,(c = 0).

Consideriamo ad esempio le funzioni $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 2x$; $h(x) = x^2 + 6x$; $t(x) = x^2 - 4x$.
Possiamo osservare che i grafici delle funzioni g, h e t sono traslati in diverse direzioni nel piano cartesiano rispetto a quello di f. Un'interpretazione "semplice" per il valore di b non c'è. Riprenderemo l'argomento considerando il caso generale della funzione $y = ax^2 + bx + c$.

Determiniamo l'insieme di definizione e l'insieme delle immagini della funzione t.
$D_t = R$
Per l'insieme delle immagini osserviamo che sono tutti i numeri reali dalla coordinata y del punto più basso della parabola (chiamato *vertice* della parabola) fino all'infinito. Il problema è dunque quello di trovare le coordinate esatte del vertice della parabola.
Per il vertice della parabola passa l'asse di simmetria, che è parallelo all'asse delle y.
Il grafico della funzione interseca l'asse delle x nei punti di coordinate x=0 e x=4 (sono chiamati gli *zeri della funzione* e sono soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x = 0$).
La coordinata x del vertice della parabola si trova a metà tra 0 e 4, ed è quindi x=2 (la si ottiene anche facendo la media tra le due coordinate).
La coordinata y invece è semplicemente l'immagine di x=2, cioè $t(2) = 2^2 - 2 * 4 = -2$.
Le coordinate del vertice sono quindi (2; -2) e $Im_t = [-2;+\infty[$.
Determina l'insieme di definizione e quello delle immagini per le funzioni g e h (per Im ricordati di trovare prima le coordinate del vertice).
....
....
....
....
....
....
....
....

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
g(x)	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24	35
h(x)	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16	27	40	55
t(x)	45	32	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5



Esercizio: prova a far diventare iniettiva la funzione g e a trovare la forma algebrica della sua inversa.

....

....

....

....

....

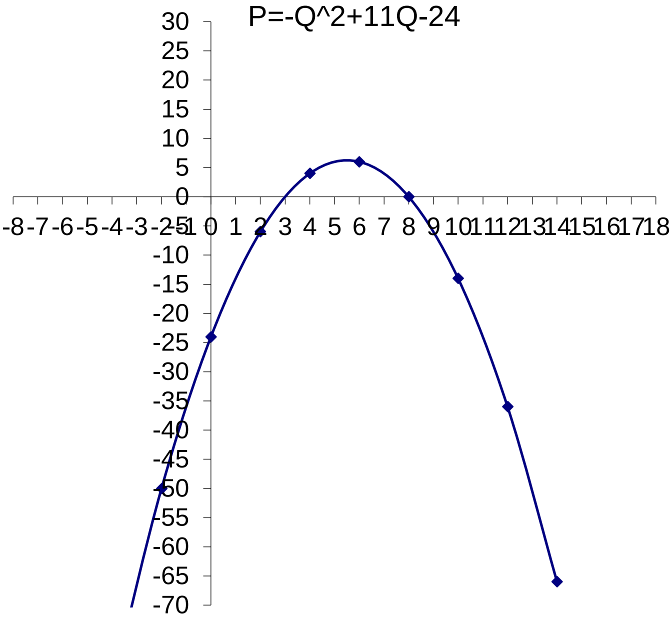
11.16 LA PARABOLA

11.16.0 Un esempio tratto dall'economia

Una funzione del profitto (l'utile, cioè il guadagno, non il ricavo) è ad esempio
$P = -Q^2 + 11Q - 24$.

A) Il suo grafico è una parabola aperta verso il basso, per cui aumenterà e poi diminuirà in un certo intervallo. Rappresentiamo la funzione nel piano cartesiano.

Q	P=-Q^2+11Q-24
-3	-66
-2	-50
-1	-36
0	-24
1	-14
2	-6
3	0
4	4
5	6
6	6
7	4
8	0
9	-6
10	-14
11	-24
12	-36
13	-50
14	-66



B) Determiniamo algebricamente il punto di equilibrio (breakeven point) e indichiamolo sul grafico.:
è dato da $P = 0$, quindi si risolve la quadratica:
…………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

………
………
………
………
………

C) Il punto in cui si ha profitto massimo è il vertice:
P = 11/2 = 5,5 e

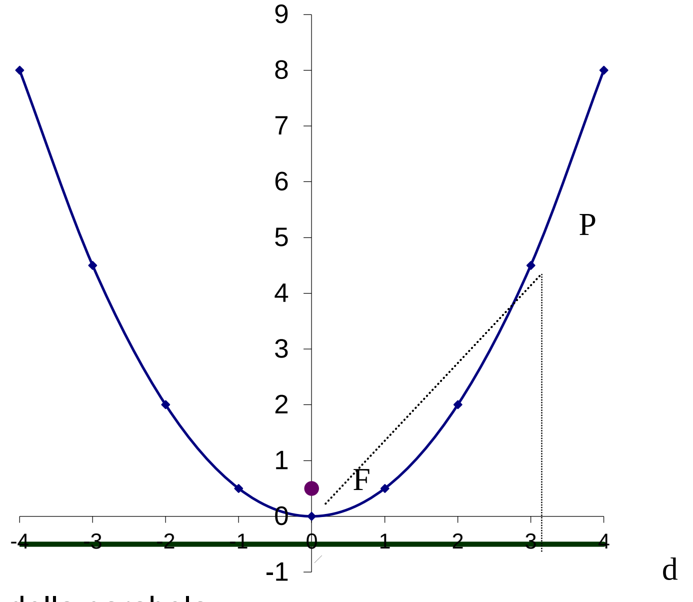
Q = -25/4 = 6,25
(i valori esatti si troveranno mediante formule che verranno presentate nelle pagine seguenti).

11.16.1 La parabola con vertice in O(0; 0)

Definizione: fissiamo un punto F, il <u>fuoco</u>, e una retta d, la <u>retta direttrice</u> :
chiamiamo <u>parabola</u> il luogo di punti P(x; y) tali che la distanza di P dal fuoco F è uguale alla distanza del punto P dalla retta d.

Verificheremo che la curva definita in questo modo è effettivamente una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Consideriamo dapprima:
F = F(0 ; p) e d : y = -p

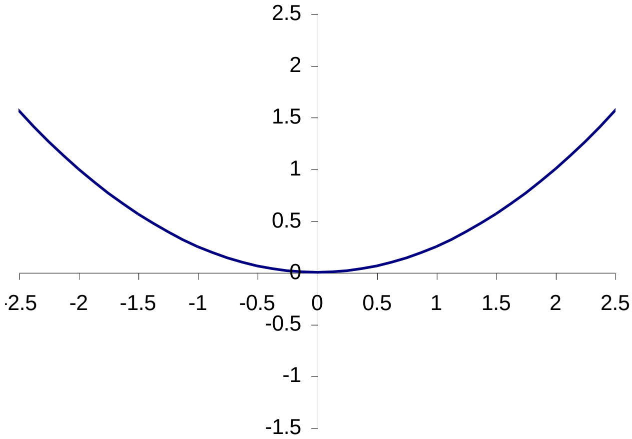


Cerchiamo l'equazione della parabola

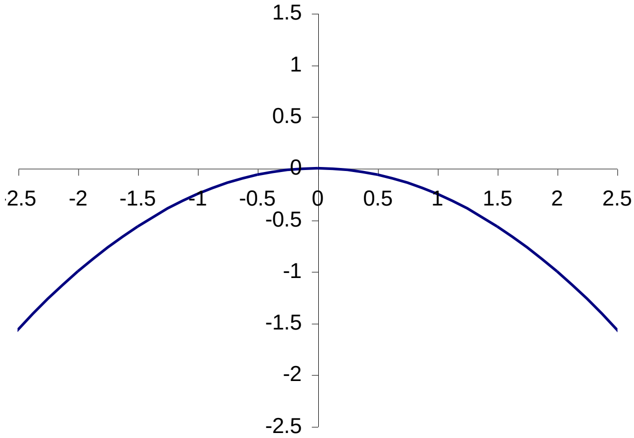
$$\overline{PF} = d(F; d)$$
$$\sqrt{(y-p)^2 + (x-0)^2} = y + p$$
$$\left(\sqrt{y^2 - 2yp + p^2 + x^2}\right)^2 = (y+p)^2$$
$$y^2 - 2yp + p^2 + x^2 = y^2 + 2yp + p^2$$
$$-4yp = -x^2$$
$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Dunque se $a = \frac{1}{4p}$ l'equazione diventa $y = ax^2$.

ESEMPI:
- Se il fuoco è F(0; ½) e la direttrice è y= -½ , l'equazione della parabola è y= ½ x^2 (vedi figura).



- Se il fuoco è F(0; 1) e la direttrice è y = -1, l'equazione della parabola è $y = \frac{1}{4}x^2$.



- Se il fuoco è F(0; -1) e la direttrice è y = 1, l'equazione della parabola è $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Osservazioni:

i) Se a >0, la parabola y = ax^2 è rivolta verso l'alto (infatti p>0 la direttrice è posta sotto il fuoco);
se a < 0, la parabola y = ax^2 è rivolta verso il basso (infatti p<0 la direttrice è posta sopra il fuoco).

ii) Il vertice della parabola è V(0; 0) (infatti è a metà tra la direttrice e il fuoco).

iii) L'asse di simmetria della parabola è l'asse delle y (O_y): x = 0. L'asse delle x (O_x) è tangente alla parabola nel vertice.

iv) Il fuoco è $F\left(0\ ;\frac{1}{4a}\right)$ e la direttrice è $y = -\frac{1}{4a}$, perchè $p = \frac{1}{4a}$.

<u>Esercizi</u>:
1) Determina l'equazione della parabola di fuoco F(0; 3/8) e avente vertice in 0; rappresenta graficamente la parabola. [$y = \frac{2}{3}x^2$]

2) Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{3}x^2$, determina le coordinate del fuoco e del vertice e l'equazione della retta direttrice. [$F(0; -\frac{3}{4})$; $y = \frac{3}{4}$]

3) Il punto A(4; 2) appartiene alla parabola di fuoco F(0; 2) e avente direttrice y =-2 ? Perché?
4) Determina il vertice, l'asse di simmetria, qualche punto e rappresenta graficamente le parabole di equazione:

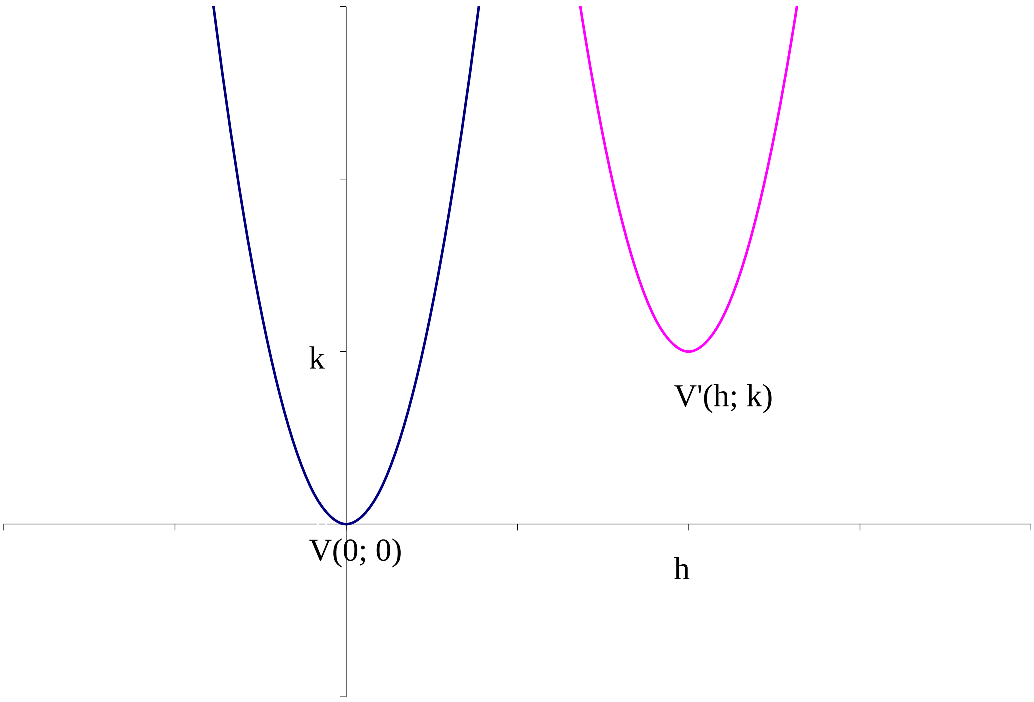
f: $y = 1/2\ x^2$ g: $y = x^2$ h: $y = -2x^2$ i: $y = -3/2x^2$

11.16.2 La parabola traslata nel piano

Le seguenti considerazioni mostreranno che la definizione del precedente paragrafo porta all'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Nel piano il fuoco F = F(0 ; p) e la direttrice d: y = -p danno luogo alla parabola $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Consideriamo la traslazione che manda i punti (x; y) in $\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases}$.



Il fuoco	F(0; p)	$\longrightarrow$	F' (h ; p + k)
il vertice	V(0; 0)	$\longrightarrow$	V'(h ; k)
la direttrice	y = -p	$\longrightarrow$	y' = -p +k
l'asse di simmetria	x = 0	$\longrightarrow$	x' = h

e l'equazione della parabola

$$y=\frac{1}{4p}x^2 \longrightarrow y'-k=\frac{1}{4p}(x'-h)^2$$

Risolviamo le parentesi :

$$y'-k=\frac{1}{4p}\left[(x')^2-2hx'+h^2\right]$$

$$y'=\frac{1}{4p}x'^2-\frac{h}{2p}x'+\left(\frac{h^2}{4p}+k\right)$$

Posto $a=\frac{1}{4p}$, $b=-\frac{h}{2p}$, $c=\frac{h^2}{4p}+k$ l'equazione diventa $y' = ax'^2 + bx' + c$.

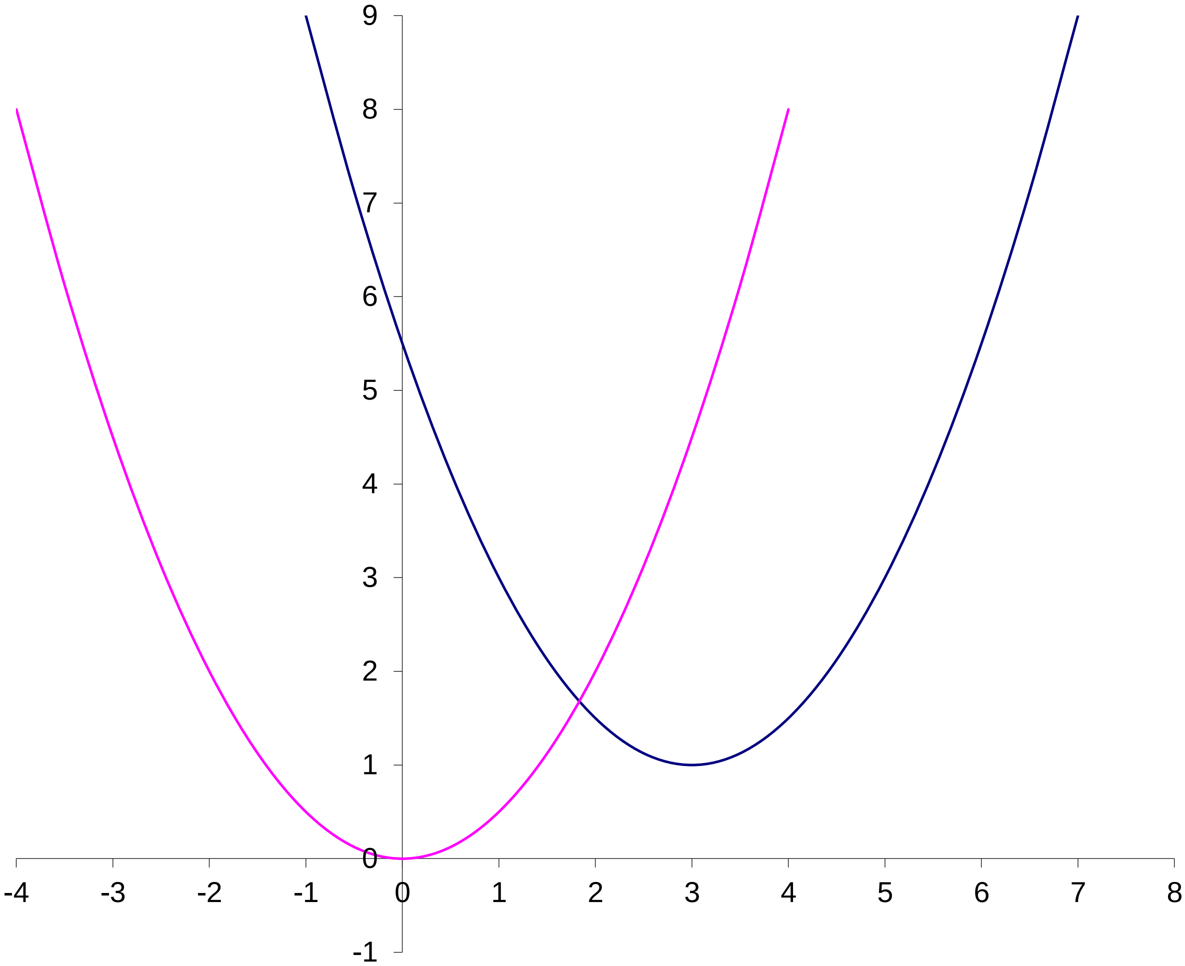
ESEMPIO: L'equazione della parabola ottenuta dalla parabola di fuoco F(0; ½) e direttrice y = -½, mediante la traslazione $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+1 \end{cases}$, ha equazione $y' = a x'^2 +bx' + c$.

Dove: a = b = c =

E' la parabola di: vertice V(…….; …….),

fuoco F(…….; …….)

direttrice y = ……… .



<u>Osservazioni</u>: Data la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

i) **Se a >0, la parabola è rivolta verso l'alto ;**
se a < 0, la parabola è rivolta verso il basso;
se a =0, l'equazione non rappresenta una parabola.

ii) **Il vertice della parabola è** $\mathbf{V}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

il fuoco della parabola è $\mathbf{F}\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$.

Infatti:

$$p = \frac{1}{4a},$$

$$b = -\frac{h}{2\frac{1}{4a}} \quad \Leftrightarrow \quad h = -\frac{b}{2a},$$

$$c = \frac{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2}{4\frac{1}{4a}} + k \quad \Leftrightarrow \quad k = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

iii) **L'asse di simmetria della parabola è la retta di equazione x =** $-\frac{b}{2a}$**.**

la retta direttrice della parabola è d: y = $-\frac{1+\Delta}{4a}$;

ESEMPI:

a) Verifica che la parabola di equazione $y = -x^2 -2x +4$ ha vertice $V(-1; 5)$ e asse $x = -1$
Determina il fuoco e la direttrice. [F(-1; 19/4), y=21/4]

b) Verifica che la parabola di equazione $y = x^2 -2x +3$ ha fuoco $F(1; 9/4)$, ha direttrice di equazione $y = 7/4$. Qual è suo vertice? e l'asse di simmetria? [V(1;2), x=1]

c) Verifica che l'equazione della parabola di fuoco $F(2; 3)$ e di direttrice $y = 7/2$ è $y = -x^2 +4x -3/4$.

11.16.3 Considerazioni generali

Esempio:rappresenta graficamente la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$
Per disegnare una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è importante:

a) analizzare il segno del coefficiente a: se $a > 0$, la parabola è rivolta verso l'alto ; se $a < 0$, la parabola è rivolta verso il basso.

b) calcolare il discriminante della parabola: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$

c) calcolare le coordinate del vertice V e l'equazione dell'asse di simmetria

$V\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{-b^2+4ac}{4a}\right)$ equazione asse di simmetria $x = -\dfrac{b}{2a}$

Il vertice V(x;y) è il punto d'incontro della parabola f con il suo asse di simmetria s; è l'unico punto della parabola che non ha corrispettivi punti simmetrici. Se la parabola è rivolta verso l'alto V è un minimo, se la parabola è rivolta verso il basso V è un massimo.

d) calcolare le intersezioni con gli assi cartesiani:

$f \cap$ asse y $x = 0$
$y = a(0)^2 + b(0) + c$ **Q(0;c)**

$f \cap$ asse x $y = 0$
$0 = ax^2 + bx + c$

Si tratta di risolvere l'equazione di secondo grado. $ax^2 + bx + c = 0$
Per trovare **$f \cap$ asse x** analizziamo il discriminante:

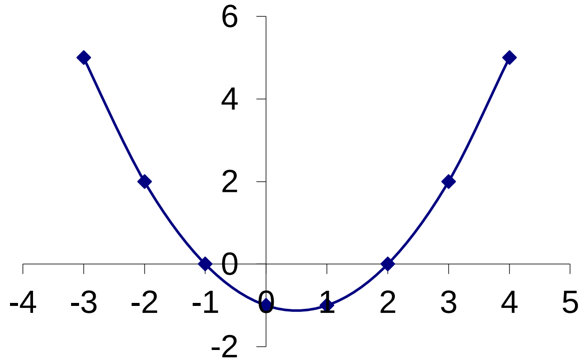
$\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$

- **> 0 : 2 punti distinti**
  $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ **$P_1(x_1;0)$ e $P_2(x_2;0)$**
- **= 0 : 1 solo punto (il vertice della parabola)**
  $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$ **V(-b/2a;0)**
- **< 0 : 0 punti**

e) Disposizione della parabola in base al segno di Δ e di a

	Segno del discriminante della parabola Δ		
Segno di a	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
a>0			
a<0			

f) Consideriamo una parabola che interseca l'asse x in due punti distinti $P_1(x_1;0)$ e $P_2(x_2;0)$ con $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$:



l'asse di simmetria ovviamente passa a metà tra i due punti, dunque per quanto visto sul punto medio, vale:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$ (formula a p. 35)

l'ordinata del vertice invece si trova per sostituzione:

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{-b^2+4ac}{4a}$$ (formula a p. 35)

Esercizio: rappresenta graficamente e separatamente le parabole di equazione:

f: $y = -x^2+2x-3$ g: $y = -x^2 + 9$ h: $y = 3x^2 + 6x$ i: $y = -x^2 + 4x - 4$

[Δ=-8 V(1 ; -2), Δ=36 V(0 ; 9), Δ=36 V(-1 ;-3), Δ=0 V(2; 0)]

11.16.4 Intersezioni di una retta e di una parabola

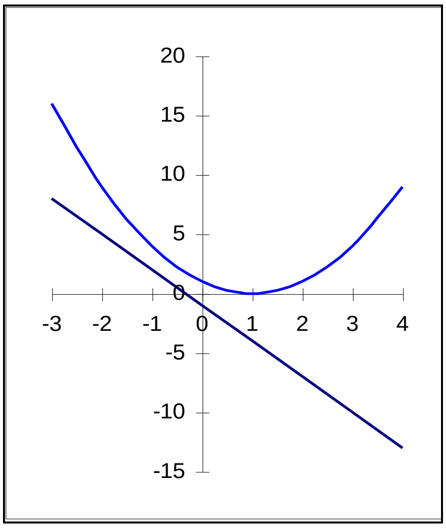
Siano r : $y = mx + q$ una retta e p: $y = ax^2 + bx + c$ una parabola.
Chiediamoci quali posizioni possono avere reciprocamente tali curve.

1° caso: la retta e la parabola non hanno alcun punto in comune e la retta è **esterna** alla parabola.
Algebricamente si traduce nel fatto che il seguente sistema di 2° grado non ha alcuna soluzione reale:

(*) $$\begin{cases} y = mx + q \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

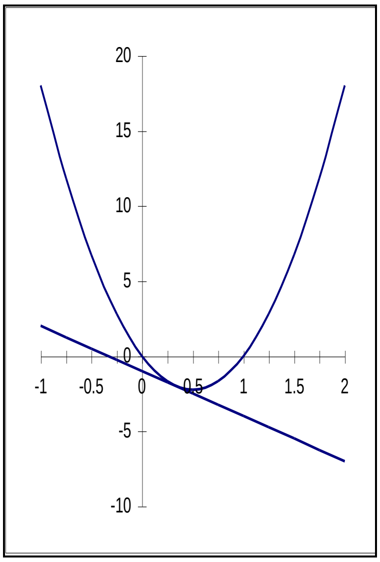
ESEMPIO: r: $y = -3x - 1$ p: $y = x^2 - 2x + 1$

Risolvi il sistema
....
....
....
....
....
....
....



<u>2° caso:</u> la retta e la parabola hanno un solo punto in comune e la retta è **tangente** alla parabola.
In questo caso il sistema (*) ha una e una sola soluzione.

ESEMPIO: r: $y = -3x - 1$ p: $y = 9x^2 - 9x$

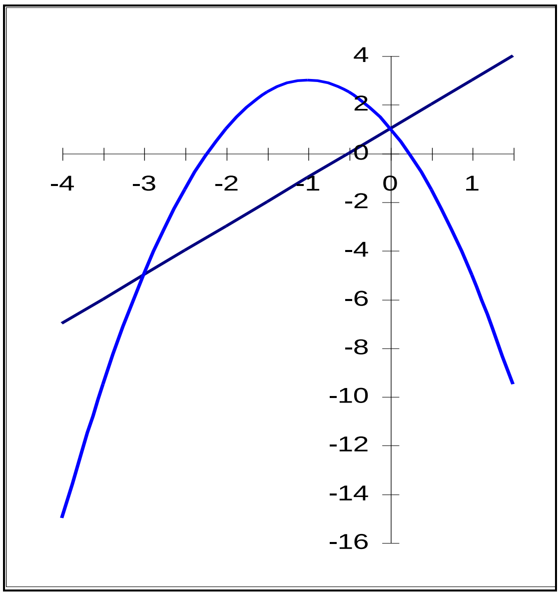


Risolvi il sistema
....
....
....
....
....
....
....

<u>3° caso:</u> la retta e la parabola hanno due punti in comune e la retta è **secante** alla parabola.
In questo caso il sistema di secondo grado (*) ha due soluzioni.

ESEMPIO: r: $y = 2x + 1$ p: $y = -2x^2 - 4x + 1$

Risolvi il sistema
....
....
....
....
....
....
....



ESERCIZI:
1. Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x$ e date le rette l: $y=-2x$, r: $y=2x$ e s: $y=2x-4$

determina se ogni retta sia esterna, tangente o secante alla parabola. Determina gli eventuali punti di intersezione. [(0;0), (-4;8), (0;0); ∅]

2. Determina per quale valore di b la parabola di equazione $y = 3x^2 + bx + 1$ è tangente all'asse delle x. [$b=\pm 2\sqrt{3}$]

3. Trova le intersezioni con l'asse delle x delle parabole

p: $y = x^2 - x + k$ e q: $y = x^2 + x + h$

per i seguenti valori di h e k:
k = -1, k = ¼ e h = -1, h = -1/4 .

$$\left[\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};0\right),\left(\frac{1}{2};0\right);\ \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};0\right),\left(\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2};0\right)\right]$$

4. Determina per quali valori di m e di q le seguenti rette r: $y = mx + 2$ e s: $y = 3x + q$ sono tangenti alla parabola di equazione $y = -x^2 - 2x - 1$.
[$m=-2\pm 2\sqrt{3}$; q=21/4]

5. Trova le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$ e passanti per A(2; 0). [y=0, y=4x-8]

11.16.5 Esercizi di ricapitolazione

1. Determina il vertice, il fuoco e la direttrice delle seguenti parabole:

a) $y = 9x^2$ [V(0;0), F(0;1/36), d:y=-1/36]
b) $x^2 = -12y$ [V(0;0), F(0; -3), d:y=3]
c) $y + 1 = 2(x - 1)^2$ [V(1;-1), F(1;-7/8), d:y=-9/8]
d) $3y - 4 = 6(x + 2)^2$ [V(-2; 4/3), F(-2; 35/24), d:y=29/24]
e) $y = 4x^2 - 4x + 1$ [V(1/2; 0), F(1/2; 1/16), d:y=-1/16]
f) $(3x + 1)^2 = 4y + 12$ [V(-1/3; -3), F(-1/3;-26/9), d:y=-28/9]
g) $25x^2 + 10x - y + 5 = 0$ [V(-1/5; 4), F(-1/5; 401/100), d:y=399/100]

2. Determina le equazioni delle parabole con le seguenti proprietà:

a) vertice (2, 1) direttrice y = -1 [$y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$]

b) vertice (3, -2) fuoco (3, 4) [$y=\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{13}{8}$]

c) fuoco (1, 2) direttrice y = -2 [$y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$]

d) la parabola passa per i punti (0,0), (-2;4) e (3;6) [$y=\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{5}x$]

e) la parabola passa per il punto (3; 10) e ha il vertice nell'origine. [$y=\frac{10}{9}x^2$]

3. Trova due numeri positivi che hanno somma 100, in modo che il loro prodotto sia massimo. [50, 50]

4. Se un oggetto viene lanciato da terra verso l'alto in linea retta, con una velocità iniziale di 29,4 metri al secondo, la sua altezza in metri, dopo t secondi, sarà data, trascurando la resistenza dell'aria, dalla formula $h(t) = 29,4\ t - 4,9\ t^2$. Determina l'altezza massima dell'oggetto e l'istante t in cui cadrà di nuovo al suolo.
[44,1 m, 3 sec]

5. Supponi che la distanza d, in chilometri, che un'automobile può coprire con un pieno di benzina, viaggiando alla velocità di v chilometri orari, sia dato dalla formula $d=12v-(v/\ 4)^2$.
Quale velocità rende massima la distanza d e di conseguenza minimo il consumo di carburante? [96 km/h]

6. Un'agenzia immobiliare dà in affitto tutti gli 80 appartamenti di uno stabile a 1'000 Fr al mese (per ciascun appartamento. Ad ogni aumento dell'affitto di 40 Fr, corrisponde una partenza da un appartamento. Ogni appartamento libero comporta una spesa per l'agenzia di 60 Fr al mese per tasse e manutenzione, mentre il costo mensile per tasse, servizi, manutenzione e acqua di uno di quelli occupati ammonta a 260 Fr al mese. Che affitto dovrebbe pretendere l'agenzia per avere il massimo profitto?
[2200 Fr]

7. Un’agenzia per il noleggio di auto noleggia 300 auto al giorno alla tariffa giornaliera di 40 Fr. Ad ogni aumento della tariffa di 1 Fr corrisponde un calo di 5 auto nel noleggio. A quale tariffa giornaliera dovrebbero essere noleggiate le auto per avere il massimo guadagno? [50 Fr]